データ同化初歩

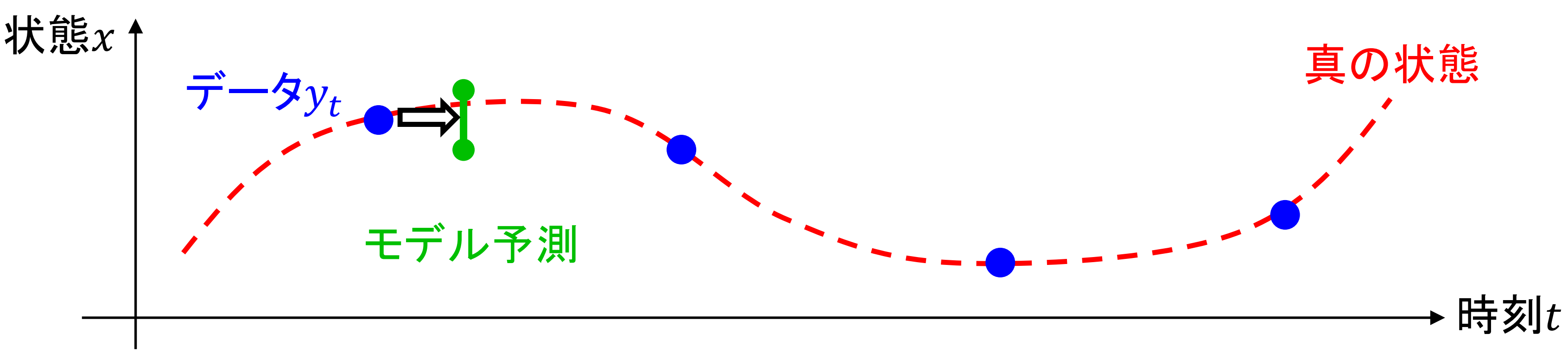
瀬尾亨

東京大学　助教
seo@civil.t.u-tokyo.ac.jp
交通・都市理論ドクター若手勉強会
2020-09-25

- データ同化で解きたい問題
- 状態空間モデル
- データ同化の理論：逐次ベイズフィルタ
- 解法１：カルマンフィルタ
  - 練習問題
- 解法２：パーティクルフィルタ

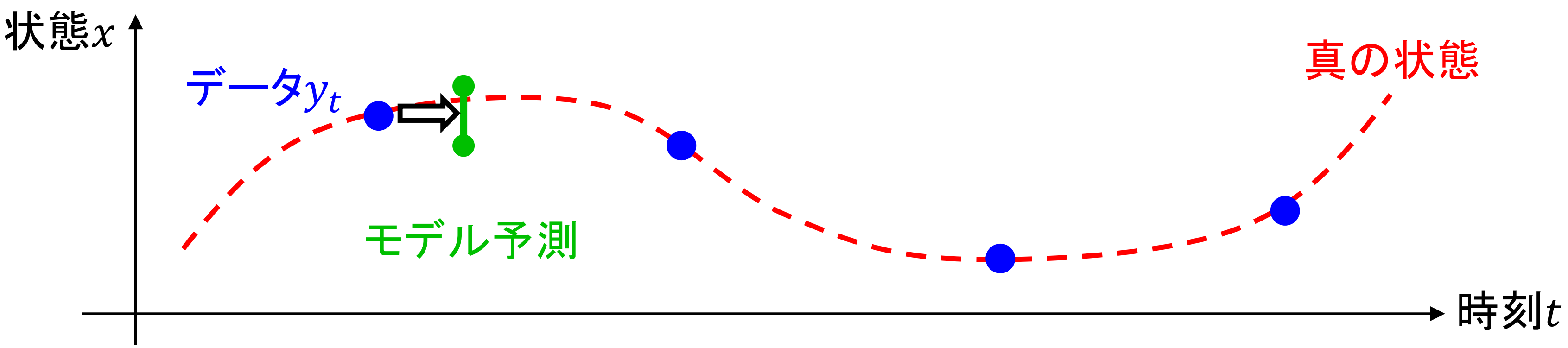
交通工学・土木計画学でよくある問題

- 時間変化する現象の状態を逐次知りたい
  - 例：交通量，滞在人数
- データが不確実・部分的
  - 例：限られた定点観測
- データが異質
  - 例：交通センサスとプローブパーソン
- モデルが不確実
  - 例：行動モデル，交通流モデル，シミュレーション



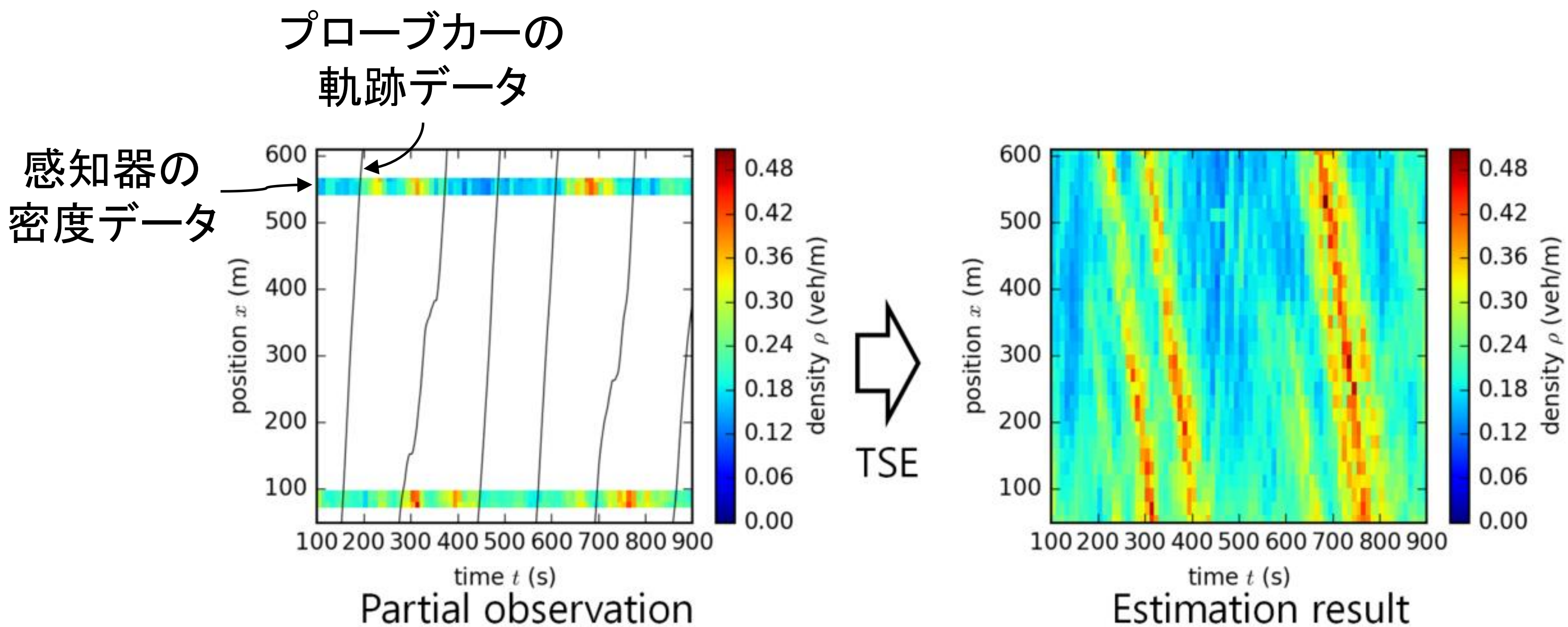
データ同化で解く問題

- 状態が(確率的に)時間変化するシステムがある
- システムの状態に関する不正確・不完全・互いに異質なデータがある
- システムの挙動に関する不正確なモデルがある
- 以上のもとで，システムの状態を逐次推定する



データ同化で解きたい問題：例

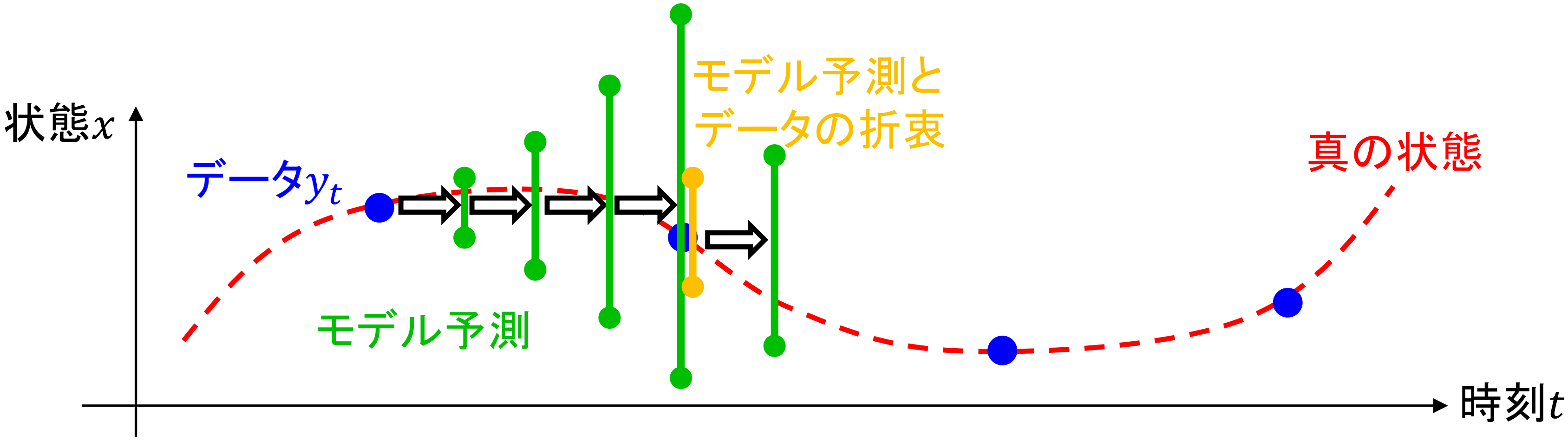
- 交通状態推定
  - 全ての地点の交通量が時間変化する道路がある
  - 感知器が一部の地点の交通量を一定精度で観測し，一部の車両が車両軌跡を観測している
  - 交通流モデルがある
  - 以上のもとで，全ての地点の交通量を知りたい



基本的な考え方

- 直感的な解き方
  - データのないところはモデルによる予測値で補間する
  - 新たなデータが入った時はどうする？
  - データとモデル予測値を折衷すればよさそう．データとモデルの信頼度を比較し，信頼できる方に寄せればよさそう.

- これを厳密にやるのがデータ同化

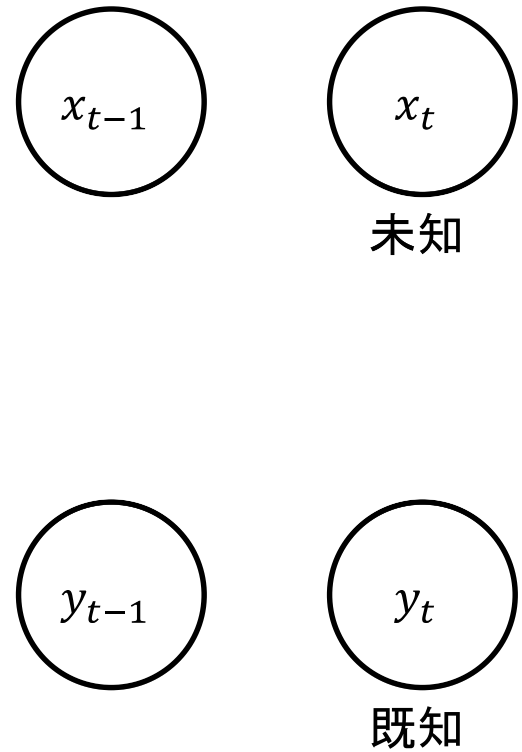


- データ同化で解きたい問題
- 状態空間モデル
- データ同化の理論：逐次ベイズフィルタ
- 解法１：カルマンフィルタ
  - 練習問題
- 解法２：パーティクルフィルタ

記法・仮定

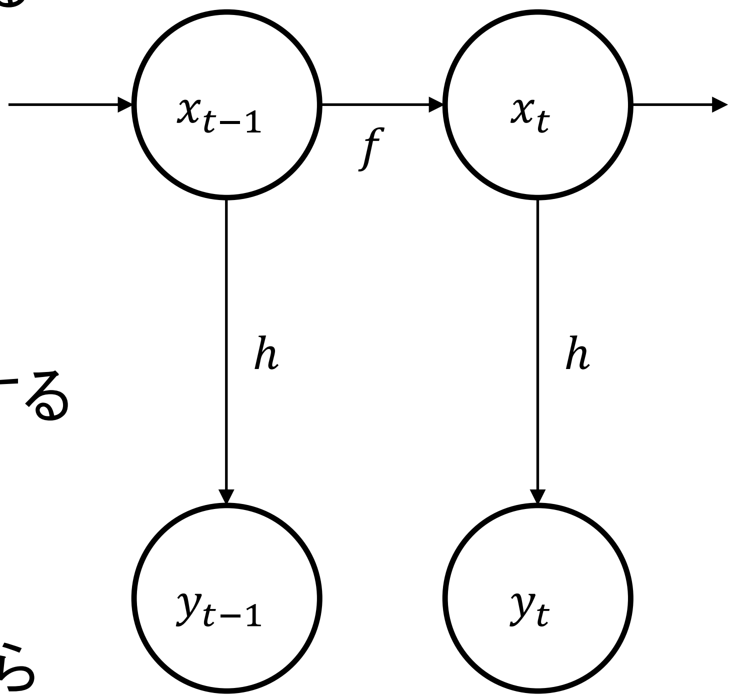
- 状態ベクトル: x_t
  - 時刻tの系の状態
  - 未知変数. この値・分布を知りたい.
  - 例:位置毎の交通量を並べたもの

- 観測ベクトル: y_t
  - 時刻tに観測されている情報
  - 既知変数
  - 例:車両感知器設置位置の交通量



記法・仮定

- システムモデル: f
  - ある状態からその一期後の状態を求めるモデル
  - マルコフ性を仮定
  - 確率的関数
- システム方程式: $x_t = f(x_{t-1})$
  - 確率分布として$x_t \sim p(x_t | x_{t-1})$とも表現する
- 観測モデル: h
  - ある状態のときにシステムを観測して得られるデータのモデル
  - 確率的関数
- 観測方程式: $y_t = h(x_t)$
  - 確率分布として$y_t \sim p(y_t | x_t)$とも表現する



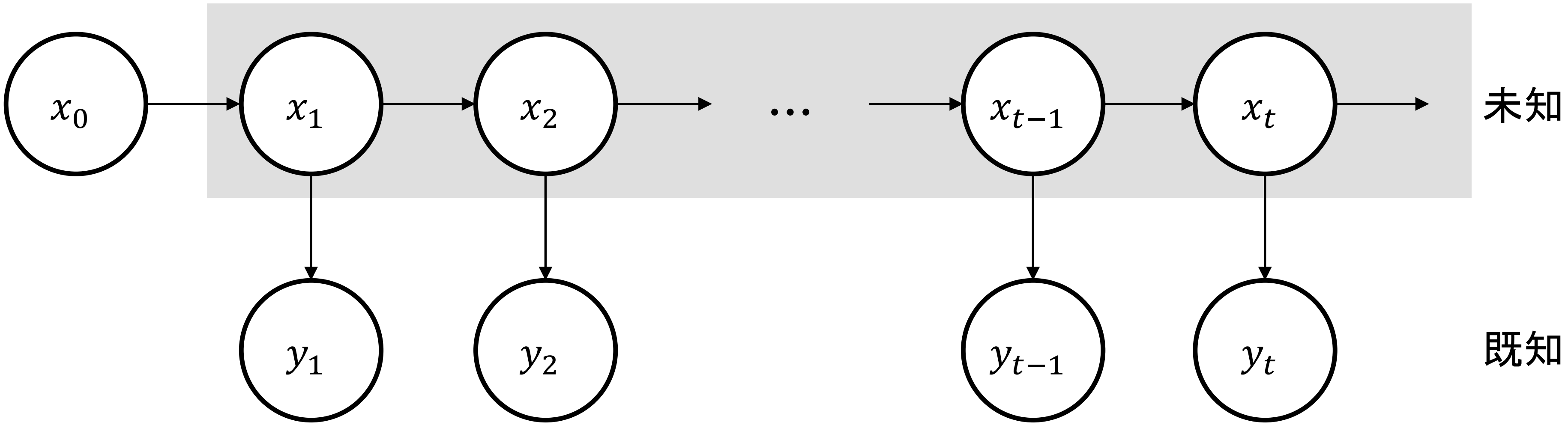
状態空間モデル

- 状態空間モデル(関数表記)

$$x_t = f(x_{t-1})$$
$$y_t = h(x_t)$$

- 状態空間モデル(確率分布表記)

$$x_t \sim p(x_t | x_{t-1})$$
$$y_t \sim p(y_t | x_t)$$



状態空間モデルの例1:1次元ランダムウォーク

- 一次元空間上に点が一つ存在し，時刻毎に正規分布に従いランダムに移動する
- 点の位置を観測し，誤差のあるデータを得る

- 状態空間モデル表現:
  - 状態ベクトル:点の位置x_t（スカラー）
  - 観測ベクトル:点の位置の観測値 y_t（スカラー）
  - システムモデル:

$$x_t = x_{t-1} + \nu_t$$

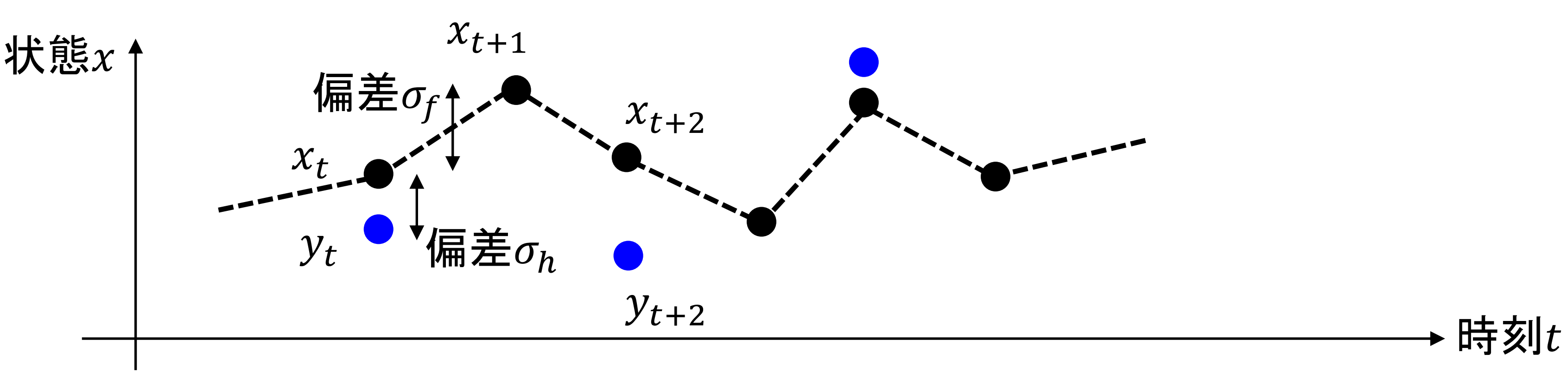
$$\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

  - 観測モデル:

$$y_t = x_t + \omega_t$$

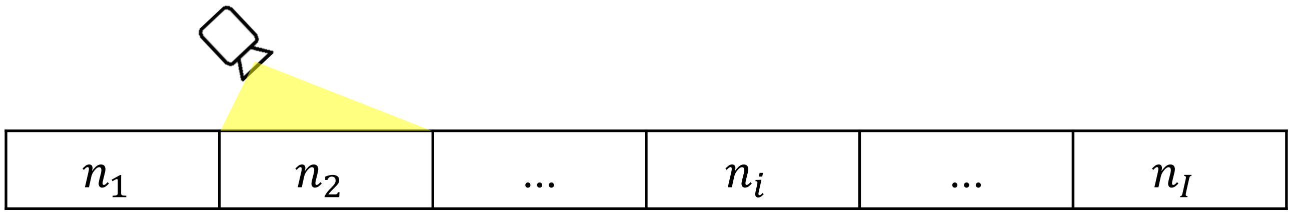
$$\omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$$

- データ同化:観測データから点の位置を推定する問題



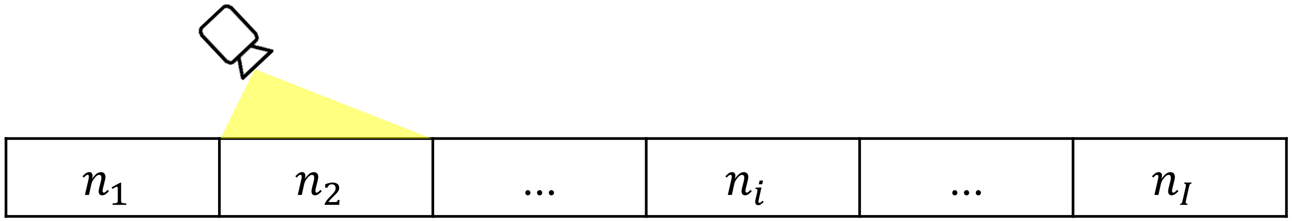
状態空間モデルの例2:交通流

- 単路上の交通流
  - 100-200m区間がカメラでモニタリングされており，そこの車両台数が観測されているとする



- 100m間隔で区切り，時刻tのセルi内の車両台数をn_i^tとおく
  - 状態ベクトル:$x_t = \left(n_1^t, n_2^t, \ldots, n_i^t, \ldots\right)^\top$
- 100-200m区間で時刻tに観測される車両台数を$\hat{n}_2$とおく
  - 観測ベクトル:$y_t = \left(\hat{n}_2^t\right)$

状態空間モデルの例2：交通流



- 状態ベクトル：$x_t = \left(n_1^t, n_2^t, \ldots, n_i^t, \ldots\right)^{\mathsf{T}}$
- 観測ベクトル：$y_t = (\hat{n}_2^t)$

- ある時点の車両台数分布から，次の時点の車両台数分布を予測する交通流モデルf（例：CTM）があるとする
  - システムモデル：$x_t = f(x_{t-1})$

- 感知器による観測には誤差ϵ_tがあるとする
  - 観測モデル：$y_t = (0,1,0,0, \ldots, 0)x_t + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim N(0, \sigma_h^2)$

状態空間モデルまとめ

- 状態ベクトル: x_t
  - 時刻tの系の状態
  - 未知変数. この値・分布を知りたい.
- 観測ベクトル: y_t
  - 時刻tに観測されている情報
  - 既知変数
- システムモデル: f
  - ある状態からその一期後の状態を求めるモデル. $x_t = f(x_{t-1})$
- 観測モデル: h
  - ある状態のときにシステムを観測して得られるデータのモデル. $y_t = h(x_t)$

- 状態空間モデル(関数表記)

$$x_t = f(x_{t-1})$$
$$y_t = h(x_t)$$

- 状態空間モデル(確率分布表記)

$$x_t \sim p(x_t | x_{t-1})$$
$$y_t \sim p(y_t | x_t)$$

- データ同化で解きたい問題
- 状態空間モデル
- データ同化の理論：逐次ベイズフィルタ
- 解法1：カルマンフィルタ
  - 練習問題
- 解法2：パーティクルフィルタ

観測データに基づく状態推定

- $p(x_{1:t}, y_{1:t})$を計算できれば状態推定問題は解決
  - これが計算できれば，例えばx_tの期待値を求められるようになる
  - ※$x_{1:t} = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$

- リアルタイム推定を考え，$p(x_t, y_{1:t})$を計算することにする

- $y_{1:t}$は所与なので，$p(x_t|y_{1:t})$を考えればよい
  - 過去・現在の全時点のデータが与えられたときに現在の状態を求める問題
  - $p(x_t|y_{1:t})$をフィルタ分布と呼ぶ

- 問題が一般的すぎてこのままでは解くのが難しい
  - 解き方のわかっている問題に分解する
  - 解き方のわかっている問題：システムモデル$p(x_t|x_{t-1})$や観測モデル$p(y_t|x_t)$で計算できる問題
  - この計算方法を逐次ベイズフィルタと呼ぶ

$p(x_t|y_{1:t})$の分解

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t}) &= p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_t,\boldsymbol{y}_{1:t-1}) \\
&= \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{y}_{1:t-1})p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})} \\
&= \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})} \\
&= \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t,\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t} \\
&= \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}
\end{aligned}
$$

$y_{1:t}$を分解

$y_{1:t-1}$に条件付けされた
ベイズの定理

マルコフ性
$p(y_t|x_t,y_{1:t-1}) = p(y_t|x_t)$

分母をx_tについて周辺化

- $p(y_t|x_t)$: 観測モデル＝既知
- $p(x_t|y_{1:t-1})$: 時刻1〜$t-1$の観測データ$y_{1:t-1}$が与えられたときに，時刻tの状態x_tを求める一期先予測である
- ベイズ更新としての解釈
  - 事後分布：フィルタ分布
  - 事前分布：前時刻からの一期先予測
  - 尤度：観測モデル

$p(x_t|y_{1:t-1})$の分解

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1}) &= \int p(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1} \\ &= \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{y}_{1:t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1} \\ &= \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1} \end{aligned}$$

- $p(x_t|x_{t-1})$:システムモデル
- $p(x_{t-1}|y_{1:t-1})$:元の解きたい問題$p(x_t|y_{1:t})$を一期前にずらしたもの

逐次ベイズフィルタ

フィルタ

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}$$

$t \coloneqq t-1$

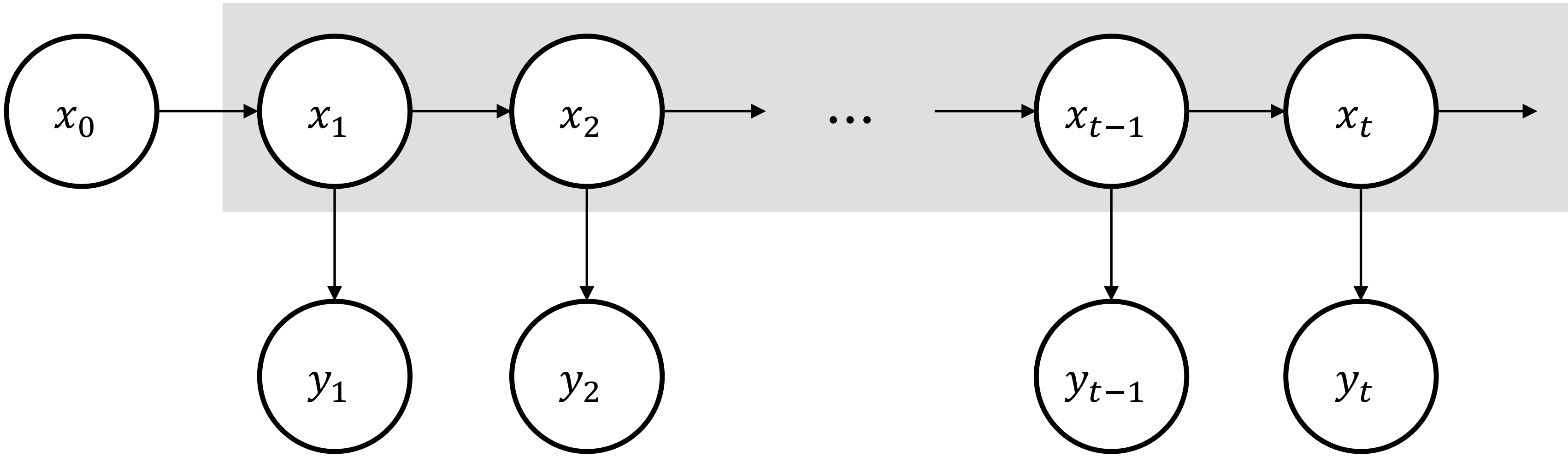
予測

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1}$$

- よって，$p(x_T|y_{1:T})$と$p(x_T|y_{1:T-1})$を$T = t$から順番に過去にさかのぼるように計算していけば，$p(x_t|y_{1:t})$が求まる

- 逆に言えば，$p(x_t|x_{t-1})$と$p(y_t|x_t)$を$t = 0$から順番に将来に向かって計算していけば，逐次$p(x_t|y_{1:t})$が求まる

逐次ベイズフィルタ



- 計算手順:
  1. 初期条件:$p(x_0|y_0)$が所与
  2. 予測:$p(x_1|y_0)$を　$p(x_1|x_0)$, $p(x_0|y_0)$から計算
  3. フィルタ:$p(x_1|y_1)$を　$p(y_1|x_1)$, $p(x_1|y_0)$から計算
  4. 予測:$p(x_2|y_1)$を　$p(x_2|x_1)$, $p(x_1|y_1)$から計算
  5. …
  6. 予測:$p(x_t|y_{1:t-1})$を　$p(x_t|x_{t-1})$, $p(x_{t-1}|y_{1:t-1})$から計算
  7. フィルタ:$p(x_t|y_{1:t})$を　$p(y_t|x_t)$, $p(x_t|y_{1:t-1})$から計算
  8. …

逐次ベイズフィルタ

フィルタ
（時刻$t-1$の事後分布）
$p(x_{t-1}|y_{1:t-1})$

予測
（時刻tの事前分布）
$p(x_t|y_{1:t-1})$

フィルタ
（時刻tの事後分布）
$p(x_t|y_{1:t})$

…

システムモデル
$p(x_t|x_{t-1})$

観測モデル
$p(y_t|x_t)$

- 計算手順：
  1. 初期条件：$p(x_0|y_0)$が所与
  2. 予測：$p(x_1|y_0)$を $p(x_1|x_0)$, $p(x_0|y_0)$から計算
  3. フィルタ：$p(x_1|y_1)$を $p(y_1|x_1)$, $p(x_1|y_0)$から計算
  4. 予測：$p(x_2|y_1)$を $p(x_2|x_1)$, $p(x_1|y_1)$から計算
  5. …
  6. 予測：$p(x_t|y_{1:t-1})$を $p(x_t|x_{t-1})$, $p(x_{t-1}|y_{1:t-1})$から計算
  7. フィルタ：$p(x_t|y_{1:t})$を $p(y_t|x_t)$, $p(x_t|y_{1:t-1})$から計算
  8. …

逐次ベイズフィルタの問題

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}$$

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1}$$

- 逐次ベイズフィルタの計算法は自明ではない
- 積分があるためclosed-formに計算できない場合もある

- 特殊な場合に対する厳密解法の例：
  - カルマンフィルタ：状態空間モデルが線形・ガウスの場合．行列演算で計算する．
- より一般の場合に対する近似解法の例：
  - 拡張カルマンフィルタ：モデルを線形近似
  - パーティクルフィルタ：モンテカルロ法
  - アンサンブルカルマンフィルタ：モンテカルロ法と行列演算のハイブリッド

逐次ベイズフィルタまとめ

- フィルタ分布$p(x_t|y_{1:t})$を求めたい

- 下式を逐次的に計算することで求められる
  - 予測$p(x_t|y_{1:t-1})$をシステムモデル$p(x_t|x_{t-1})$, 一期前フィルタ分布$p(x_{t-1}|y_{1:t-1})$から計算
  - フィルタ$p(x_t|y_{1:t})$を観測モデル$p(y_t|x_t)$, 予測$p(x_t|y_{1:t-1})$から計算

- 積分が含まれており，そのままでは解けない

- データ同化で解きたい問題
- 状態空間モデル
- データ同化の理論：逐次ベイズフィルタ
- 解法１：カルマンフィルタ
  - 練習問題
- 解法２：パーティクルフィルタ

線形ガウス状態空間モデル

- 状態空間モデルの特殊ケースを考える
  - システムモデル・観測モデルが線形
  - ノイズが正規分布

- 線形ガウス状態空間モデル

$$\boldsymbol{x}_t = F_t \boldsymbol{x}_{t-1} + G_t \boldsymbol{\nu}_t$$

$$\boldsymbol{y}_t = H_t \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\omega}_t$$

  - ν_t: システムノイズ. $\nu_t \sim N(0, Q_t)$
  - ω_t: 観測ノイズ. $\omega_t \sim N(0, R_t)$
  - 状態x_tは正規分布する

- カルマンフィルタを使って逐次データ同化ができる

表記

- $x_{t|t}$: フィルタ$p(x_t|y_{1:t})$の期待値
- $V_{t|t}$: フィルタ$p(x_t|y_{1:t})$の分散共分散行列
- $x_{t|t-1}$: 予測$p(x_t|y_{1:t-1})$の期待値
- $V_{t|t-1}$: 予測$p(x_t|y_{1:t-1})$の分散共分散行列

- $x_{t|t}$と$V_{t|t}$が求めたい答え

- 以下，導出過程の詳細は省略し，直感的説明のみ行う
  - 詳細は樋口(2011)などを参照のこと

- 予測$p(x_t|y_{1:t-1})$の計算はシステムモデルと前期のフィルタを用いる

逐次ベイズフィルタの予測

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1}$$

$$\Downarrow$$

カルマンフィルタの予測

$$\boldsymbol{x}_{t|t-1} = F_t \boldsymbol{x}_{t-1|t-1}$$

$$V_{t|t-1} = F_t V_{t-1|t-1} F_t' + G_t Q_t G_t'$$

（参考：線形システムモデル $\boldsymbol{x}_t = F_t \boldsymbol{x}_{t-1} + G_t \boldsymbol{\nu}_t$ $(\nu_t \sim N(0, Q_t))$）

- フィルタ$p(x_t|y_{1:t})$の計算は観測モデルと予測を用いる

逐次ベイズフィルタのフィルタ

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}$$

$$\Downarrow$$

カルマンフィルタのフィルタ

$$K_t = V_{t|t-1}H_t'(H_tV_{t|t-1}H_t' + R_t)^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}_{t|t} = \boldsymbol{x}_{t|t-1} + K_t(\boldsymbol{y}_t - H_t\boldsymbol{x}_{t|t-1})$$

$$V_{t|t} = V_{t|t-1} - K_tH_tV_{t|t-1}$$

(参考：線形観測モデル $\boldsymbol{y}_t = H_t\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\omega}_t$ （$\omega_t \sim N(0, R_t)$）)

フィルタの直感的説明

← $\boldsymbol{y}_t = H_t \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\omega}_t$

観測モデル

予測値

フィルタ期待値 $$\boldsymbol{x}_{t|t} = \boldsymbol{x}_{t|t-1} + K_t \overbrace{(\boldsymbol{y}_t - H_t \boldsymbol{x}_{t|t-1})}^{\text{予測値と観測値のズレ}}$$

ズレに対してかける補正係数

カルマンゲイン $$K_t = V_{t|t-1} H_t' (H_t V_{t|t-1} H_t' + R_t)^{-1} \simeq \frac{\text{予測誤差}}{\text{予測誤差＋観測誤差}}$$

予測誤差

観測誤差

- フィルタ期待値は，予測値に対して「予測値と観測値のズレ」に基づく補正を加えたものである
- 補正係数は，予測誤差と観測誤差に基づき定まる．観測誤差が相対的に小さいほど補正が大きい．

分散共分散の予測値

フィルタ
分散共分散

$$V_{t|t} = V_{t|t-1} - K_t H_t V_{t|t-1}$$

補正係数

カルマンゲイン

$$K_t = V_{t|t-1} H_t' (H_t V_{t|t-1} H_t' + R_t)^{-1} \simeq \frac{\text{予測誤差}}{\text{予測誤差＋観測誤差}}$$

予測誤差

観測誤差

- フィルタ分散共分散は，予測値のそれを小さく補正したものである
- 補正係数は，予測誤差と観測誤差に基づき定まる．観測誤差が相対的に小さいほど補正が大きい

カルマンフィルタの計算手順

1. 初期条件$x_{0|0}, V_{0|0}$を所与とする. $t = 1$とする.
2. 予測を計算する: $\boldsymbol{x}_{t|t-1} = F_t \boldsymbol{x}_{t-1|t-1}$

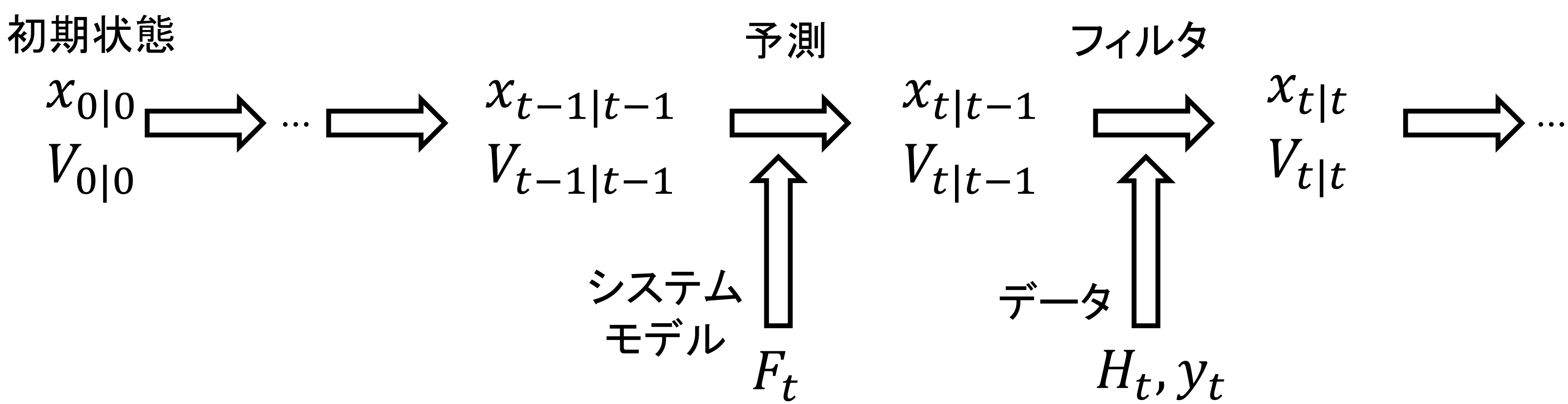
   $$V_{t|t-1} = F_t V_{t-1|t-1} F_t' + G_t Q_t G_t'$$

3. フィルタを計算する: $K_t = V_{t|t-1} H_t' (H_t V_{t|t-1} H_t' + R_t)^{-1}$

   $$\boldsymbol{x}_{t|t} = \boldsymbol{x}_{t|t-1} + K_t(\boldsymbol{y}_t - H_t \boldsymbol{x}_{t|t-1})$$

   $$V_{t|t} = V_{t|t-1} - K_t H_t V_{t|t-1}$$

4. $t \coloneqq t + 1$してステップ2に戻る



数値例：1次元ランダムウォーク

- 一次元空間上に点が一つ存在する．時刻tの点の位置をx_t（スカラー）とおく．その点が下式に従いランダムに動くとする．

$$x_t = x_{t-1} + \nu_t$$

$$\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

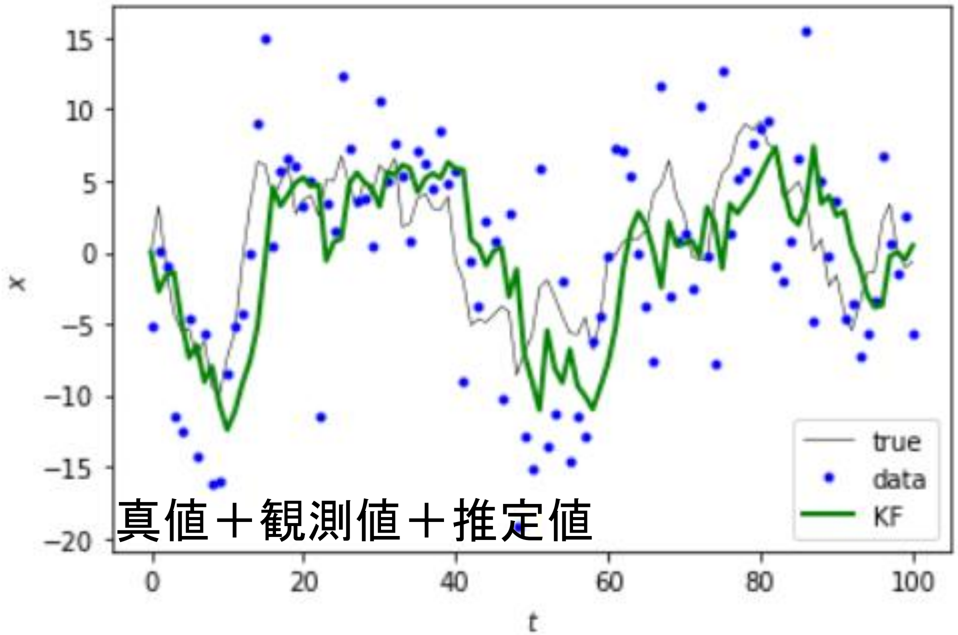
- 時刻tに点の位置を測定し，誤差のある観測値y_tを得る

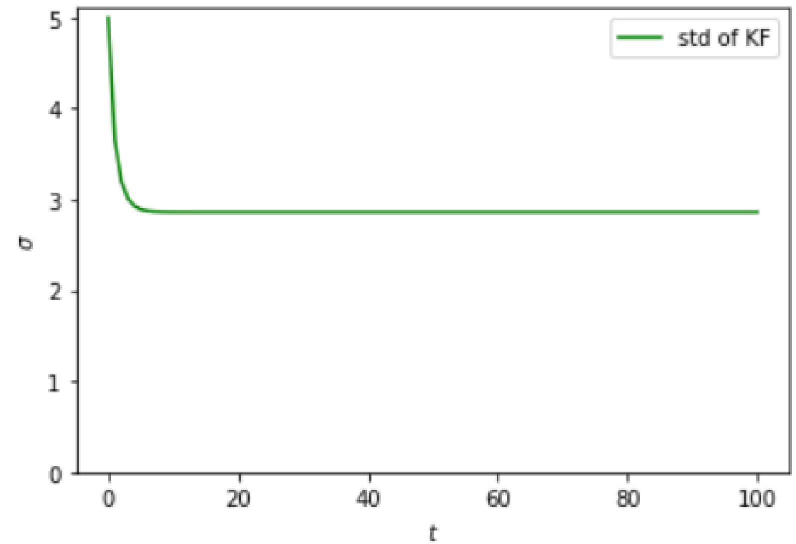
$$y_t = x_t + \omega_t$$

$$\omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$$

- 毎時刻に点を観測し，その位置を追跡する問題を考える

数値例: 1次元ランダムウォーク





- ランダムウォークの標準偏差σ_f : 2
- 観測の標準誤差σ_h : 5

- 観測値より真値に近い推定ができている
- フィルタ分布の標準偏差は一定に収束する

問題：1次元ランダムウォーク

- 一次元空間上に点が一つ存在する．時刻tの点の位置をx_t（スカラー）とおく．その点が下式に従いランダムに動くとする．

$$x_t = x_{t-1} + \nu_t$$

$$\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

- 時刻$t-1$の点の位置が分布として推定されている

$$x_{t-1} \sim \mathcal{N}(x_{t-1|t-1}, \sigma_x^2) \quad \text{つまり} \quad V_{t-1|t-1} = \sigma_x^2$$

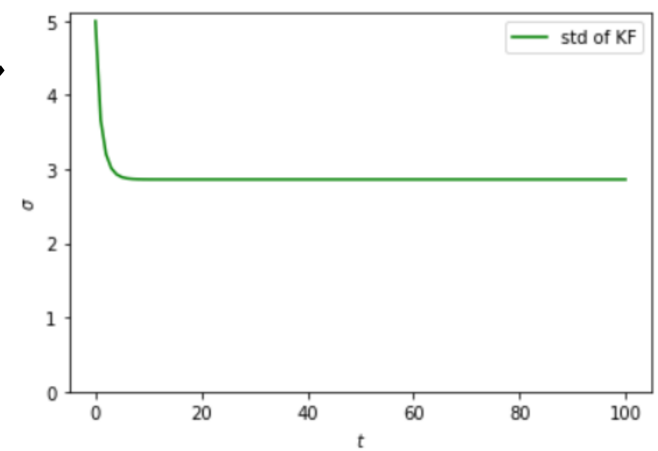
- 時刻tに点の位置を測定し，誤差のある観測値y_tを得る

$$y_t = x_t + \omega_t$$

$$\omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$$

- 時刻tの点の位置の分布を推定せよ．つまり，時刻tのフィルタ分布の平均$x_{t|t}$と分散$V_{t|t}$を$x_{t-1|t-1}, y_t, \sigma_f, \sigma_x, \sigma_h$を使って表現せよ．
- また，得られた$x_{t|t}$の意味を解釈せよ

- 応用問題1：観測値よりもシステムモデルによる予測値が信頼される条件を求めよ
  - $x_{t|t}$がy_tより$x_{t|t-1}$に近い条件
- 応用問題2：時刻tの位置の推定精度（分散）が時刻$t-1$の推定精度より向上する条件を求めよ
  - $V_{t|t} < V_{t-1|t-1}$になる条件
- 応用問題3：先ほどの数値例で，フィルタ分散$V_{t|t}$が一定値に収束していた．この値を求めよ．



解答

今回の状態空間モデル

$$x_t = x_{t-1} + \nu_t$$
$$y_t = x_t + \omega_t$$
$$x_{t-1} \sim \mathcal{N}(x_{t-1|t-1}, \sigma_x^2)$$
$$\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$
$$\omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$$

一般の線形ガウス状態空間モデル

$$\boldsymbol{x}_t = F_t \boldsymbol{x}_{t-1} + G_t \boldsymbol{\nu}_t$$
$$\boldsymbol{y}_t = H_t \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\omega}_t$$

カルマンフィルタの項

$$\boldsymbol{x}_{t-1|t-1} = x_{t-1|t-1}$$
$$F_t = 1$$
$$V_{t-1|t-1} = \sigma_x^2$$
$$G_t = 1$$
$$Q_t = \sigma_f^2$$

$$\boldsymbol{y}_t = y_t$$
$$H_t = 1$$
$$R_t = \sigma_h^2$$

解答

カルマンフィルタの項

$$\boldsymbol{x}_{t-1|t-1} = x_{t-1|t-1}$$

$$F_t = 1$$

$$V_{t-1|t-1} = \sigma_x^2$$

$$G_t = 1$$

$$Q_t = \sigma_f^2$$

$$\boldsymbol{y}_t = y_t$$

$$H_t = 1$$

$$R_t = \sigma_h^2$$

カルマンフィルタの計算手順

$$\boldsymbol{x}_{t|t-1} = F_t \boldsymbol{x}_{t-1|t-1}$$

$$V_{t|t-1} = F_t V_{t-1|t-1} F_t' + G_t Q_t G_t'$$

$$K_t = V_{t|t-1} H_t' (H_t V_{t|t-1} H_t' + R_t)^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}_{t|t} = \boldsymbol{x}_{t|t-1} + K_t(\boldsymbol{y}_t - H_t \boldsymbol{x}_{t|t-1})$$

$$V_{t|t} = V_{t|t-1} - K_t H_t V_{t|t-1}$$

代入すると. . .

$$x_{t|t-1} = x_{t-1|t-1}$$

$$V_{t|t-1} = \sigma_x^2 + \sigma_f^2$$

$$K_t = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_f^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}$$

$$\begin{aligned} x_{t|t} &= x_{t-1|t-1} + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_f^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}(y_t - x_{t-1|t-1}) \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}\left(\sigma_h^2 x_{t-1|t-1} + (\sigma_x^2 + \sigma_f^2) y_t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{t|t} &= \sigma_x^2 + \sigma_f^2 - \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_f^2)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2} \\ &= \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_f^2)\sigma_h^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2} \end{aligned}$$

- 整理すると

$$x_{t|t} = \frac{1}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2} \left(\sigma_h^2 x_{t-1|t-1} + (\sigma_x^2 + \sigma_f^2) y_t \right)$$

$$V_{t|t} = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_f^2)\sigma_h^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}$$

解答：$x_{t|t}$の意味

$$x_{t|t} = \frac{1}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}\left(\sigma_h^2 x_{t-1|t-1} + (\sigma_x^2 + \sigma_f^2) y_t\right)$$

- 変形すると

$$x_{t|t} = (1 - K_t) x_{t-1|t-1} + K_t y_t$$

$$K_t = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_f^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}$$

- この式の意味は？

- データ同化では誤差をきちんとモデル化することが大事！

解答：応用問題1

- 応用問題1：観測値よりもシステムモデルによる予測値が信頼される条件を求めよ
  - $x_{t|t}$がy_tよりx_{t-1}に近い条件

$$\sigma_h^2 > \sigma_x^2 + \sigma_f^2$$

- つまり，観測ノイズが大きい時，モデルによる予測値の方が信頼される

解答:応用問題2

- 応用問題2:時刻tの位置の推定精度(分散)が時刻$t-1$の推定精度より向上する条件を求めよ
  - $V_{t|t} < V_{t-1|t-1}$になる条件

$$\sigma_h^2 < \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_f^2} + 1 \right) \sigma_x^2$$

- つまり, 以下のとき推定精度が時間とともに向上する
  - 観測ノイズが十分小さい
  - システムモデルのノイズが十分小さい
  - 前時刻の状態ノイズが十分大きい

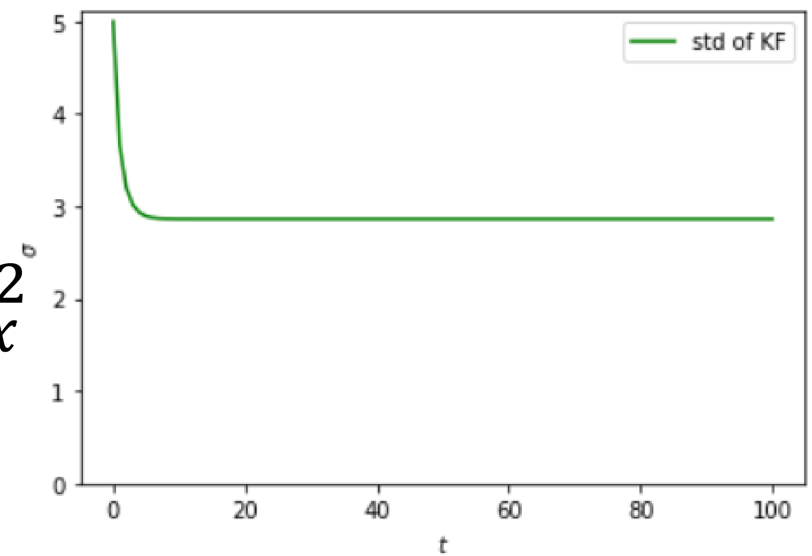
解答：応用問題3

- 応用問題3：先ほどの数値例で，フィルタ分散$V_{t|t}$が一定値に収束していた．この値を求めよ．

- ランダムウォークの標準偏差σ_f：2
- 観測の標準誤差σ_h：5

$$V_{t|t} = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_f^2)\sigma_h^2}{\sigma_x^2 + \sigma_f^2 + \sigma_h^2}$$

収束条件$V_{t|t} = V_{t-1|t-1} = \sigma_x^2$



カルマンフィルタまとめ

- 線形ガウス型状態空間モデルに対する厳密な逐次ベイズフィルタ
- 逐次ベイズフィルタと同様，予測とフィルタを交互に計算する
- 推定値の期待値は，予測値を「予測値と観測値のズレ」に基づく補正をかけたもの
  - 補正はシステムモデル・観測モデルの誤差に依存する
  - 誤差をきちんとモデル化しないと，いいかげんな重み付平均になってしまう
- 状態変数が大量にあっても，それらが複雑に相関していてもOK

- データ同化で解きたい問題
- 状態空間モデル
- データ同化の理論：逐次ベイズフィルタ
- 解法１：カルマンフィルタ
  - 練習問題
- 解法２：パーティクルフィルタ

一般の状態空間モデル

- モデルが非線形で，誤差分布がガウスに限らない場合

$$x_t = f(x_{t-1}, v_t)$$
$$y_t = h(x_t, \omega_t)$$

- 逐次ベイズフィルタの式をモンテカルロ法で解く＝パーティクルフィルタ

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}$$

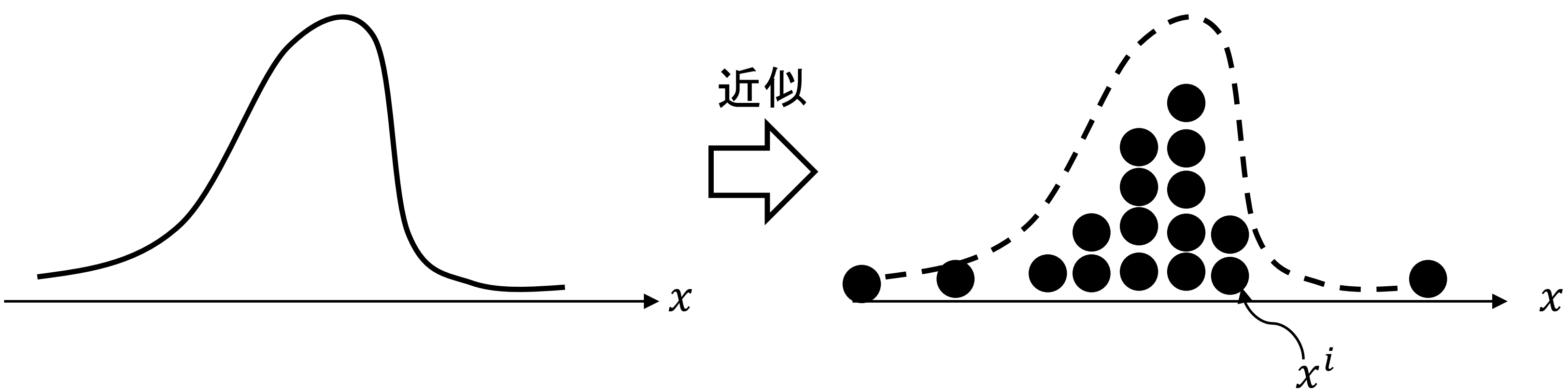
$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1}$$

- 確率分布を多数のパーティクル（粒子）でアンサンブル近似する

$$p(x) \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(x - x^i)$$

  - x^i: i番目の粒子の値
  - N: 粒子の総数

- それぞれの粒子を適切にシステムモデル・観測尤度に従って動かせば，自然とフィルタを計算できる



記法

- $x_{t|t}^{i}$: 時刻tのフィルタ分布をアンサンブル近似する粒子iの値
- $f(x_t, v_t)$: システムモデル
  - v_t: システムノイズ（確率変数）
  - v_t^i : システムノイズの分布をアンサンブル近似する粒子

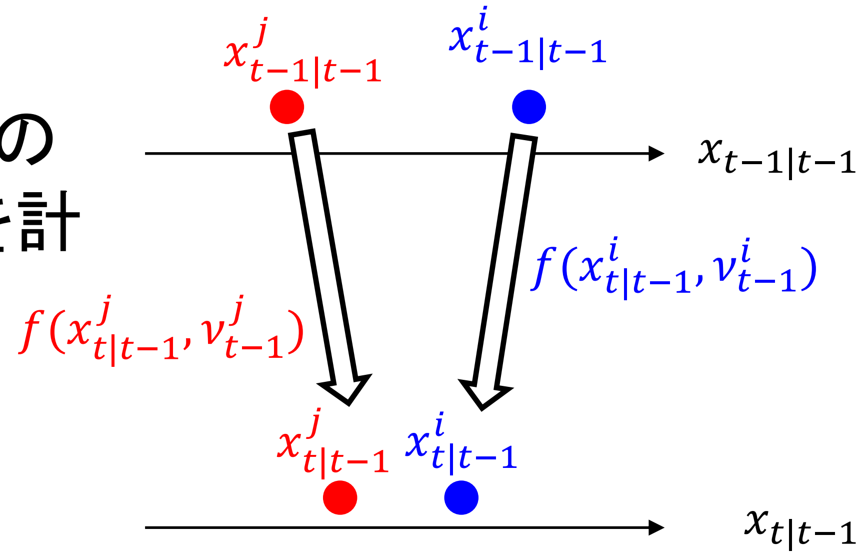
- 逐次ベイズフィルタの予測

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \int p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{x}_{t-1})p(\boldsymbol{x}_{t-1}|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{t-1}$$

- そのアンサンブル近似

$$p(x_t|y_{1:t-1}) \simeq \frac{1}{N}\sum_i \delta\left(x_t - \overbrace{f\left(x^i_{t-1|t-1}, \nu^i_t\right)}^{\text{システムモデル}}\right)$$

- 粒子毎に異なるシステムノイズの値で確定的にシステムモデルを計算する



- 逐次ベイズフィルタのフィルタ

$$p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})}{\int p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}_t)p(\boldsymbol{x}_t|\boldsymbol{y}_{1:t-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}$$

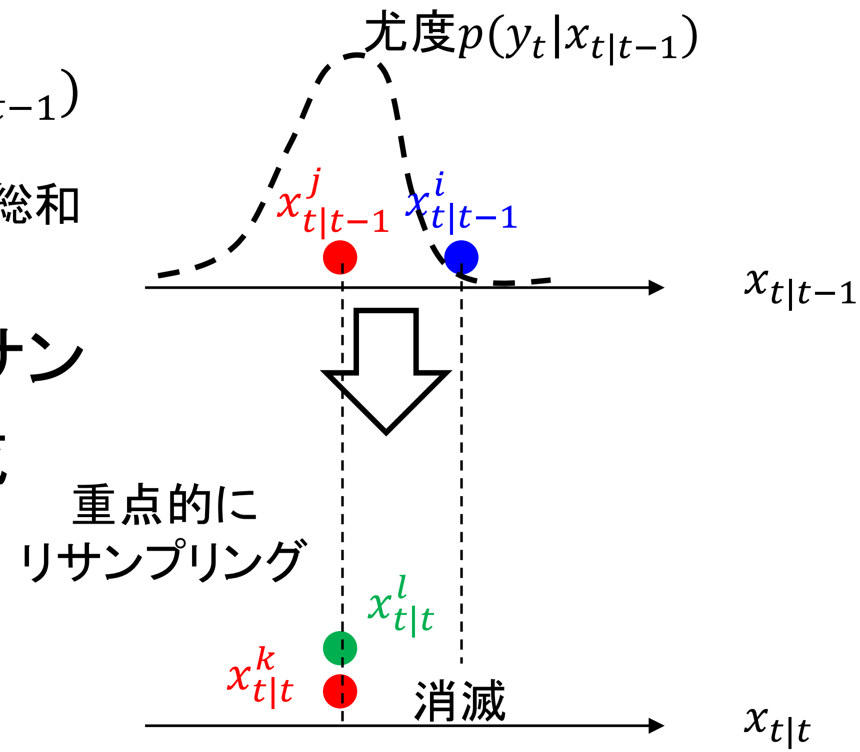
- そのアンサンブル近似

観測モデル（尤度）

$$p(x_t|y_{1:t}) \simeq \sum_i \frac{p(y_t|x^i_{t|t-1})}{\sum_j p\left(y_t\middle|x^j_{t|t-1}\right)} \delta(x_t - x^i_{t|t-1})$$

尤度の総和

- $p(x_t|y_{1:t})$に従い粒子$x^i_{t|t}$をリサンプリングし，$p(x_t|y_{1:t})$を再構成



Step 1 $i = 1, \ldots, N$ について，初期分布 $\{\boldsymbol{x}^i_{0|0}\}$ $(\boldsymbol{x}^i_{0|0} \sim p(\boldsymbol{x}_0))$ を生成する．$t := 1$ とする．

Step 2: **予測**

Step 2.1 $\forall i$ について，システムノイズ $\boldsymbol{\nu}^i_t$ を生成する．

Step 2.2 $\forall i$ について，$\boldsymbol{x}^i_{t|t-1} = \boldsymbol{f}_t(\boldsymbol{x}^i_{t-1|t-1}, \boldsymbol{\nu}^i_t)$ を計算し，予測分布 $\{\boldsymbol{x}^i_{t|t-1}\}$ を得る．

Step 3: **フィルタリング**

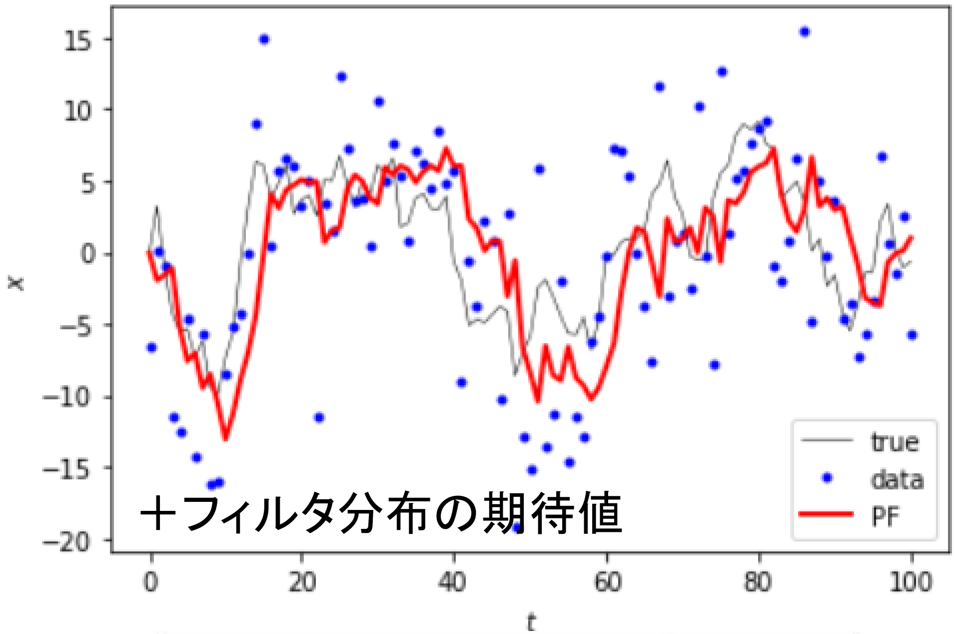
Step 3.1 $\forall i$ について，尤度 $\lambda^i_t = p(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{x}^i_{t|t-1})$ を計算する．

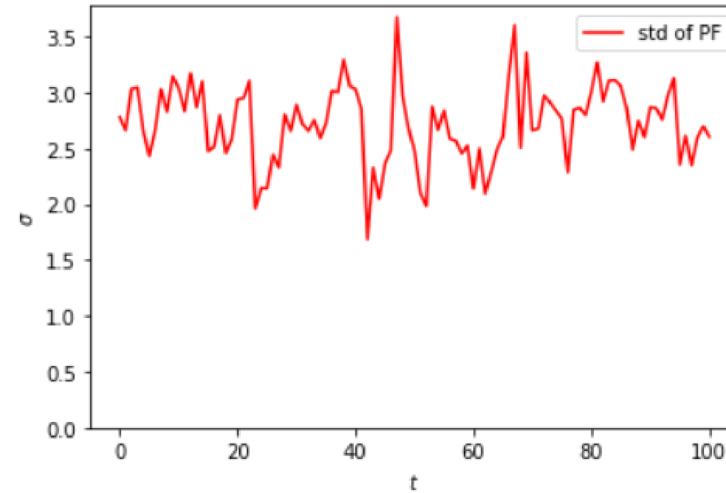
Step 3.2 $\forall i$ について，重み $\beta^i_t = \lambda^i_t / \sum_j \lambda^j_t$ を計算する．

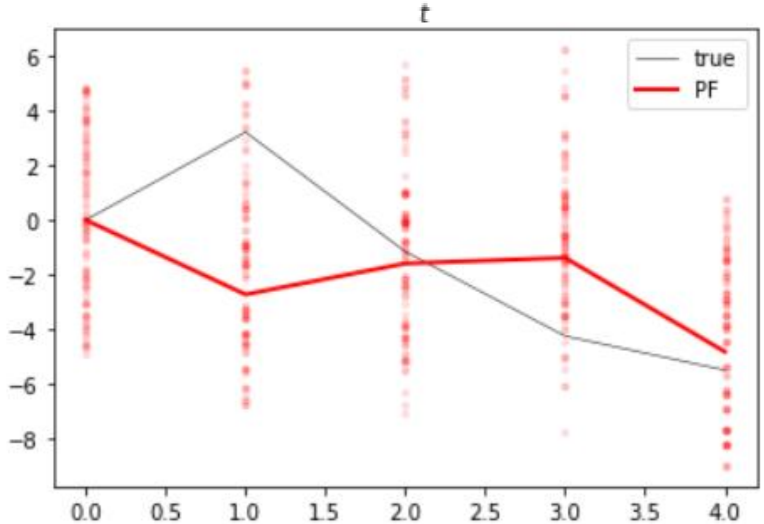
Step 3.3 $\{\boldsymbol{x}^i_{t|t-1}\}$ から i 番目の粒子が確率 β^i_t で抽出されるよう N 回の復元抽出を行い，抽出されたサンプルによりフィルタ分布 $\{\boldsymbol{x}^i_{t|t}\}$ を構成する．

Step 4 $t < T$ ならば $t := t + 1$ とし，Step 2 に戻る．

数値例：1次元ランダムウォーク

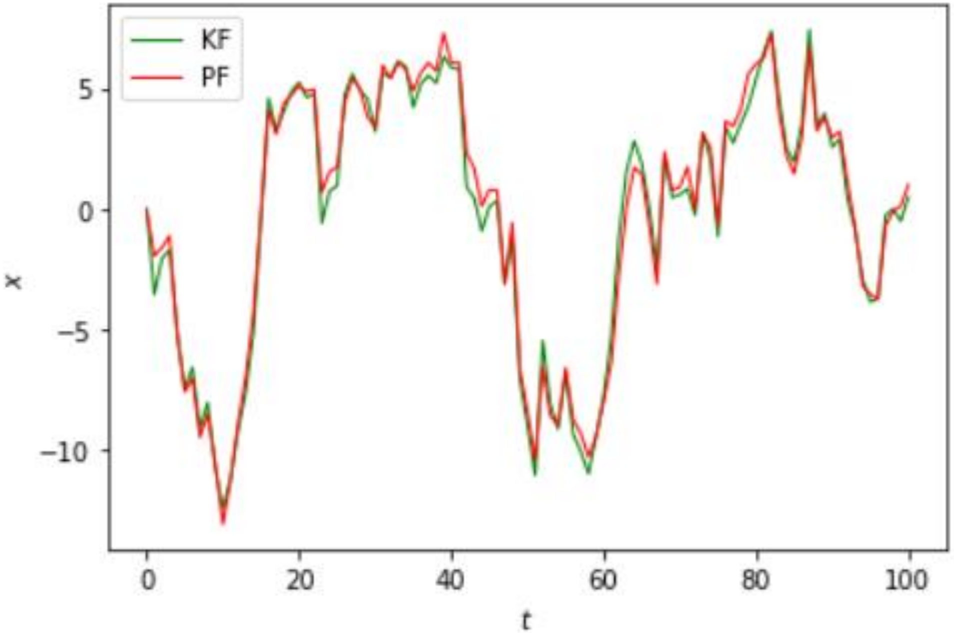


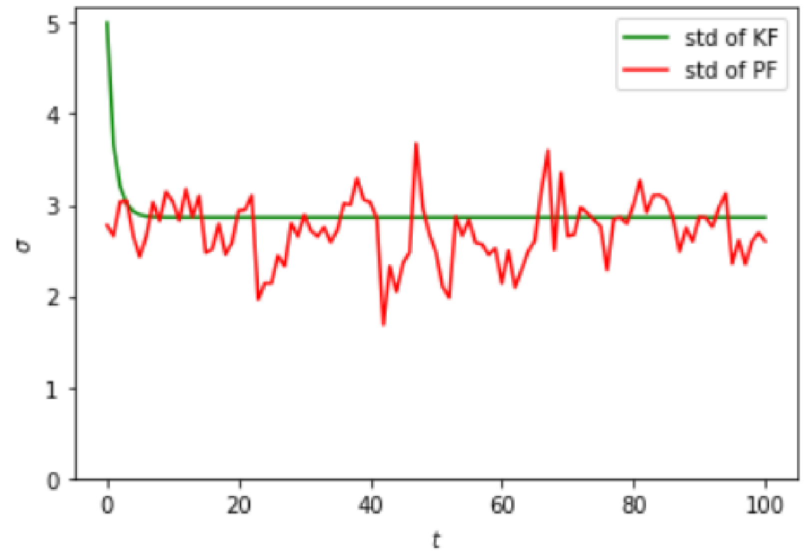




- パーティクル数100
- 良く推定出来ている

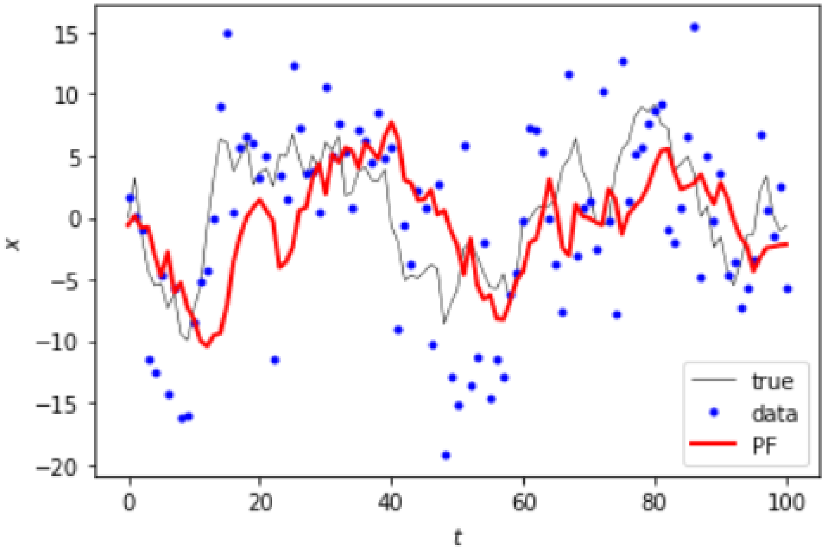
数値例:カルマンフィルタとの比較



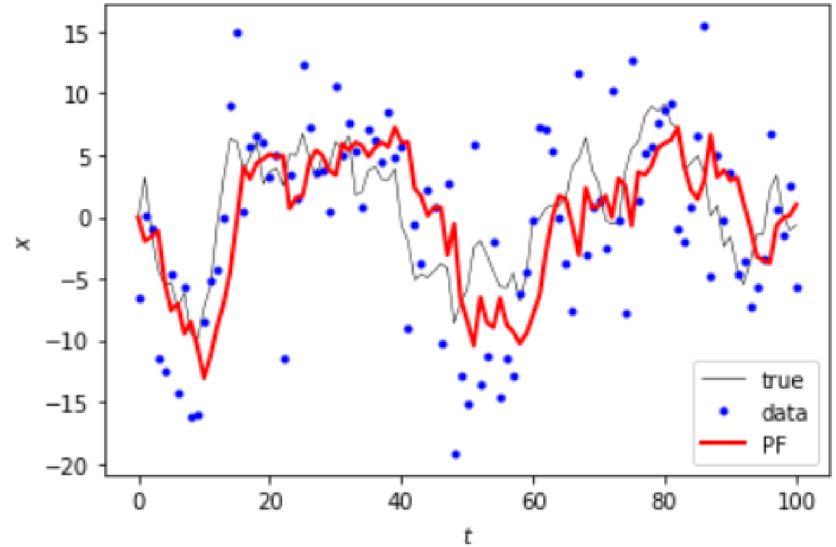


- パーティクル数100
- フィルタ分布の期待値・標準偏差ともにカルマンフィルタ(=厳密解)とほぼ一致

数値例：パーティクル数が少ない場合



パーティクル数：10



パーティクル数：100

- パーティクル数が少ない場合，近似がうまくいかない
- 時間経過とともに近似精度が悪化する現象
  - リサンプリングの問題
  - 退化と呼ばれる

- 状態空間が高次元の場合には必要なパーティクル数が指数的に増加する＝次元の呪いに弱い

パーティクルフィルタまとめ

- モデルが非線形でノイズが非ガウスの場合に適用可能
- 確率分布をパーティクルで近似し，逐次ベイズフィルタをそのままモンテカルロ法で計算
- パーティクル数が少ないと精度悪．次元の呪いに弱い
  - 高次元でも適用可能なフィルタ：アンサンブルカルマンフィルタ（EnKF）など

- データ同化で解きたい問題
- 状態空間モデル
- データ同化の理論：逐次ベイズフィルタ
- 解法1：カルマンフィルタ
  - 練習問題
- 解法2：パーティクルフィルタ

まとめ

- 状態推定問題
  - 状態が(確率的に)時間変化するシステムがある
  - システムの状態に関する不正確・不完全・互いに異質なデータがある
  - システムの挙動に関する不正確なモデルがある
  - 以上のもとで，システムの状態を逐次推定する

- データ同化手法
  - 逐次ベイズフィルタ：理論的手法
  - カルマンフィルタ：線形・ガウスモデルに対する解析解
  - パーティクルフィルタ：一般モデルに対する数値近似

- 主要参考文献：樋口知之(編著)：データ同化入門，朝倉書店，2011