

異質性と不確実性のもとでの 確率的マクロ交通流モデルの解析近似

林 和磨¹・瀬尾 亨²

¹非会員 東京科学大学 環境・社会理工学院 土木・環境工学系 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 大岡山西 6 号館 407 W6-10)

E-mail: hayashi.k.5438@m.isct.ac.jp

²正会員 東京科学大学准教授 環境・社会理工学院 土木・環境工学系 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 大岡山西 6 号館 411 W6-10)

E-mail: seo.t.aa@m.titech.ac.jp (Corresponding Author)

交通流には、カーブや道路勾配のような道路線形や規制速度、車線数、車線規制に起因する運転挙動の変化という異質性や、車両ごとの反応時間や最高速度、速度変化の特性、区間特性に対する応答性の違いによる運転挙動の変化という不確実性が存在する。本研究では、これらの要素をマクロ交通流モデルの確率的拡張として表現し、そのモデルの解析近似による求解法を提案した。そして、提案モデルと数値解法の性質を検証した。さらに、提案モデルが実際の交通流に生じる複雑な現象を再現可能であることを確認するとともに、モデルを用いてその現象のメカニズムを分析した。

Key Words: *Macroscopic traffic flow model, Heterogeneity, Uncertainty, Analytical approximation, Stochastic macroscopic traffic flow model, Traffic flow theory*

1. はじめに

交通渋滞は重要な社会課題である¹⁾。交通渋滞により旅行時間が増加し、利用者の自由時間が減少するためである。また、渋滞中の加減速は、乗客の快適性を低下させ車両の消費エネルギー量を増加させる²⁾。そのため、交通渋滞などの交通現象を表現できる交通流の分析が必要である。

現実の交通流には、異質性と不確実性が存在する。まず、異質性は、区間ごとの道路特性が異なるという区間異質性(例:カーブや勾配などの道路線形, 規制速度, 車線数, 車線規制³⁾⁻⁵⁾)と、車両ごとの運転特性が異なるという車両異質性(例:反応時間, 停車時車頭距離, 最高速度, 許容加速度^{5), 6)})の2つがある。次に、不確実性は、事前の正確な確定が困難な要因(例:走行中の車両がもつ車両異質性, 天候, 交通需要, 車両位置)がある。

これらの相互作用により複雑な交通現象が発生する。まず、交通容量などが確率的に変動しうる。また、より複雑な現象として stop-and-go 波がある。Stop-and-go 波とは、渋滞中に車両が減速と加速を繰り返す現象である⁷⁾。この現象を表すと図-1になる。

図-1の通り stop-and-go 波では、ボトルネックを先頭にした渋滞領域内で高密度と低密度の領域が交互に発生する。渋滞を招くボトルネックは、主に区間異質性により発生する^{3), 4)}。渋滞状態で stop-and-go 波が、運転挙動の不確実性により発生するといわれている²⁾。

より詳細には、stop-and-go 波について以下の研究がなされている。Laval ら⁷⁾は、この運転挙動の不確実性をモデル化し、stop-and-go 波の発生メカニズムを明らかにした。Laval ら⁷⁾は、車両の不均一な加減速過程により stop-and-go 波が発生すると示した。この不均一な加減速過程は、積極的な運転者と臆病な運転者の2通りに分類できるとした。積極的な運転者の場合、車頭距離を定常状態よりも小さくし、その後強い減速によって定常状態の車頭距離になる。一方、臆病な運転者の場合は、逆に車頭距離を定常状態よりも大きくした後に、加速によって定常状態の車頭距離になる。Laval ら⁷⁾は、このような平衡状態から逸脱して再び平衡に復帰する一連の非平衡の過程により stop-and-go 波が発生すると示した。Zheng ら²⁾は、区間異質性によるボトルネックにおいても同様のメカニズムの成立を確認した。Zheng ら²⁾は、

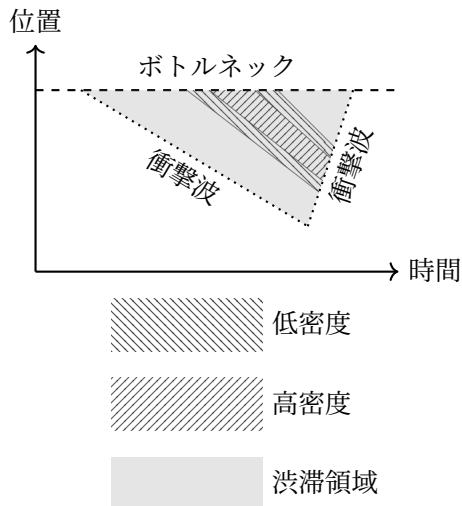


図-1 Stop-and-go 波での密度分布

加速度制約だけでは stop-and-go 波の再現には不十分であり、車両ごとに時刻によって変化する希望車頭時間の変化が stop-and-go 波の再現に必要であると示した。このように、stop-and-go 波は、車両内異質性という特定の車両が位置を変化させるに従い変化する異質性の不確実性により発生する交通現象である。

このような複雑な現象は交通流の挙動に大きな影響を与えるため、異質性と不確実性のもとの交通流モデルは重要である。例えば、異質性のもとのマクロ交通流モデルとして、区間や車両ごとに交通流基本図のパラメータを定めるものがある^{1), 8), 9)}。一方で、不確実性のもとのマクロ交通流モデルとして、確率的マクロ交通流モデルが定式化されてきた¹⁰⁾⁻¹²⁾。しかし、ほとんどの場合では、確率的マクロ交通流モデルは解析的に厳密に解けない。そのため、交通状態の確率分布を解析的あるいは数値的に近似する研究が多い¹⁰⁾⁻¹²⁾。解析的な近似手法の多くは、特定の条件下では数値的な近似手法であるモンテカルロ法に比べて計算量が小さい¹⁰⁾。そのため、計算量の削減や理論的な分析に解析的な近似手法は有用である。その中の一つである解析近似は、確率的マクロ交通流モデルの解をある仮定のもとで簡易的に求める手法である。

より詳細には、確率的マクロ交通流モデルの解析近似手法について以下の研究がなされている。Wada ら¹⁰⁾ は、確率的最短経路探索を用いて不確実な需要下でのモデルを提案した。また、高安ら¹¹⁾ は、Wada ら¹⁰⁾ の手法を改良し区間と車両の異質性を含めない不確実な運転挙動のもとでのモデルを提案した。Sumalee ら¹²⁾ は、混合正規分布を用いて不確定な需要下での区間異質性を含めた不確実な運転挙動のもとでのモデルを提案した。他にも、Zheng ら¹³⁾ は、

不確実な運転挙動のもとでのモデルを提案した。しかし、著者の知る限りでは、区間異質性・車両異質性・不確実性の全てをまとめて扱う解析近似手法は提案されていない。

既往研究でこういったモデルが提案されてこなかったのは、区間と車両の異質性下の運転挙動の表現の困難さが原因と考えられる。既往研究で用いられてきたマクロ交通流モデルは、ある時刻の車両位置や、ある地点の累積車両台数を用いて交通流を表す¹⁰⁾⁻¹²⁾。そのため、特定の地点かつ特定の車両ごとに異なる運転挙動の反映が困難である。この解決策として、ある車両の特定地点の通過時刻に着目するマクロ交通流モデルの活用が考えられる¹⁴⁾。このようなモデルを T モデルという¹⁴⁾。T モデルのもとでは、地点に依存する区間異質性と車両に依存する車両異質性による運転挙動の変化が記述しやすい。また、異質性と不確実性のもとの確率的 T モデルは、Wada ら¹⁰⁾ が定式化した確率的マクロ交通流モデルと構造的に類似している。そのため、Wada ら¹⁰⁾ の解析近似を応用すると、区間と車両の異質性のもとでの確率的な T モデルの解析近似を導出できる可能性がある。

本研究の目的は、区間と車両の異質性と不確実性のもとでの確率的マクロ交通流モデルの解析近似手法の提案である。最初に、その手法を提案する。そして、提案手法の有効性を評価するために近似手法の計算精度を評価する。最後に、提案手法を用いて異質性と不確実性が交通流に与える影響を評価する。

2. 提案手法の定式化

区間と車両の異質性と不確実性がある場合の確率的マクロ交通流モデルの解析近似手法を提案する。最初に、均質なマクロ交通流モデルを異質性と不確実性のもとで拡張する。そして、確率分布と近似計算の性質を仮定してそのモデルの解析近似手法を提案する。

2.1 提案モデルの定式化

区間と車両の異質性と不確実性がある場合の確率的マクロ交通流モデルを定式化する。最初に、均質なマクロ交通流モデルを示す。均質なマクロ交通流モデルは集計的な交通流を取り扱うモデルの一つである。このモデルでは運転挙動を集計的な交通状態の関係として表す。ここでは、特定の運転挙動モデルのもとで知られる均質なマクロ交通流モデル¹⁴⁾を示す。次に、このモデルのパラメータに異質性が

ある場合のモデルを構築する．ここで、異質性とは区間と車両ごとに運転挙動が異なるという性質を表す．そのために、区間と車両ごとに異なる運転挙動のパラメータを用いてその性質を表す．この運転挙動のもとでこのモデルを拡張する．最後に、そのモデルのパラメータに不確実性がある場合のモデルを構築する．ここで、不確実性とは事前の把握が困難な要素と推定の不確かさの2つを表す．この2つを表現するために、運転挙動のパラメータと交通流を確率変数として取り扱う．これらを用いてそのモデルを確率的に定式化する．

a) 均質性マクロ交通流モデル

マクロ交通流モデルは、集計的な交通流を取り扱うモデルである¹⁾．交通流のある車両 n が特定の位置 x を通過した時刻 t で表すと、

$$t = T(n, x) \quad (1)$$

となる．この n, x による変化により交通流を記述するマクロ交通流モデルを T モデルと呼ぶ¹⁴⁾．T モデルを時空間図により表現すると図-2 となる．図-2 の黒線は車両の走行軌跡を表す．図-2 で示すように、T モデルは n や x ごとに t を求めるモデルである．

マクロ交通流モデルでは、運転挙動を集計的な交通状態の関係として表す¹⁾．これを交通流基本図 (Fundamental Diagram: FD) という．FD のうち、よく用いられるものに三角形 FD がある^{1), 15)}．この FD のペース p と車頭時間 h の関係 H は、

$$h = H(p) \begin{cases} > \tau + \delta\eta & \text{if } p = \eta \\ = \tau + \delta p & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

と表される^{14), 15)}．ただし、 η は自由流ペース、 δ は停車時車頭距離、 τ は反応時間を表す．

Laval ら¹⁴⁾ は三角形 FD の場合の離散化 T モデルの解法を提案した．離散化 T モデルの解法は、車両離散化幅を Δn 、地点離散化幅を $\delta \Delta n$ とし、

$$T_{\tilde{x}, \tilde{n}} = \max (T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}} + \Delta n \delta \eta, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}-1} + \Delta n \tau) \quad (3)$$

となる．ここで、 $T_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ は地点番号 $\tilde{x}$ を車両番号 $\tilde{n}$ が通過した時刻である．式 (3) の第一項は自由流状態での通過時刻を表し、第二項は渋滞状態での通過時刻を表す．この関係を表すと図-3 になる．ここで、所要時間を矢印の右に示した．また、格子点はそれぞれ $T_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ に対応する．

b) 異質性マクロ交通流モデルの定式化

式 (2) に示した三角形 FD を異質性のもとで拡張する．ここでは、区間と車両ごとに FD のパラメータが異なるという異質性を考える．これは、車両や道路区間ごとに FD が異なるという吉田ら⁵⁾ の既往研

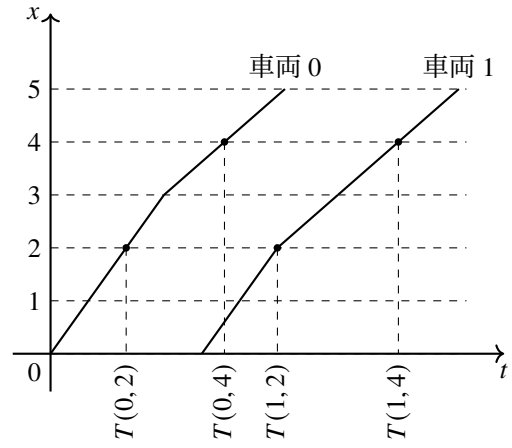


図-2 T モデルと時空間図の関係

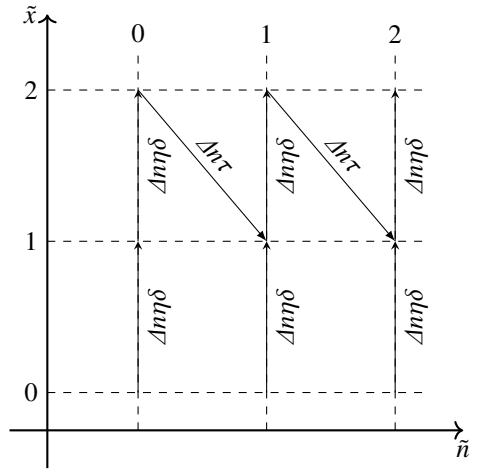


図-3 T モデルの概要

究と整合的であり、現実的と考えられる．

車両異質性は車両 Δn 台ごとに離散化して区別する．ここから、ある車両番号 i に対応する実際の累積車両台数 n_i は、

$$n_i = \Delta n i \quad (4)$$

になる．よって、車両の離散化番号 i に対応する累積車両台数の範囲は $(n_{i-1}, n_i]$ となる．

区間異質性は、特定の区間長ごとに離散化して区別する．ある区間番号 j に対応する区間の区間長は、 $\Delta n \delta_j$ に等しいとする．ここで δ_j は区間番号 j に対応する区間での停車時車頭距離である．これは、離散化 T モデルにおいて離散化誤差が発生しないようにするためである．ここから、ある区間番号 j に対応する区間の開始地点 x_j は、

$$x_j = \sum_{k=0}^j \Delta n \delta_k - \Delta n \delta_j \quad (5)$$

となる．よって、区間の離散化番号 j に対応する区間の位置範囲は $[x_j, x_{j+1})$ となる．

以上から式 (2) の離散化を行う．区間番号 j で車両番号 i での自由流ペースを $\eta_{j,i}$ ，区間番号 j で車両番号 i での反応時間を $\tau_{j,i}$ ，区間番号 j での停車時車頭距離 δ_j とする．このとき，ある区間番号 j で車両番号 i での $FDH_{j,i}$ は，

$$h = H_{j,i}(p) \begin{cases} > \tau_{j,i} + \delta_j \eta_{j,i} & \text{if } p = \eta_{j,i} \\ = \tau_{j,i} + \delta_j p & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

となる．

FD が式 (6) に従い車両と位置ごとの異質性を持つ場合の T モデルを定式化する．このモデルを異質性 T モデルと呼ぶ．ここで，車両離散化幅 Δn とする．また，地点離散化幅は，区間 j ごとに異なり $\Delta n \delta_j$ とする．ここで $\bar{x}$ を地点番号， $\bar{n}$ を車両番号，地点数を N_x ，異質性 T モデルの地点番号 $\bar{x}$ で車両番号 $\bar{n}$ での解を $T_{\bar{x},\bar{n}}$ とする．式 (3) に式 (6) を代入すると，

$$T_{\bar{x},\bar{n}} = \max (T_{\bar{x}-1,\bar{n}} + \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \eta_{\bar{x}-1,\bar{n}}, T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1} + \Delta n \tau_{\bar{x},\bar{n}}) \quad (7)$$

になる．異質性 T モデルの境界条件は，各車両のリンク流入時刻 $T_{0,\bar{n}}$ ， $\eta_{j,i}$ ， $\tau_{j,i}$ ， δ_j である．

最終地点 $N_x - 1$ の車両通過時刻 $T_{N_x-1,\bar{n}}$ を決定する際に先行車両がリンクに存在しない．そのため，最終地点を走行する車両は自由流状態となる．そのため，最終地点 $N_x - 1$ に限り， $T_{N_x-1,\bar{n}}$ は，

$$T_{N_x-1,\bar{n}} = T_{N_x-2,\bar{n}} + \Delta n \delta_{N_x-2} \eta_{N_x-2,\bar{n}} \quad (8)$$

と定まるとする．

同様に，先頭車両は常に先行車両が存在しない．そのため，先頭車両は常に自由流状態となる．先頭車両の車両通過時刻 $T_{\bar{x},0}$ は，

$$T_{\bar{x},0} = T_{\bar{x}-1,0} + \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \eta_{\bar{x}-1,0} \quad (9)$$

と定まるとする．

T モデルは，有向非巡回グラフにおける最長経路探索問題として定式化できる．このようなグラフは図-4 である．図-4 において枝の費用は矢印に横に書かれたものである．各格子点は $T_{\bar{x},\bar{n}}$ に対応する．格子点の左下の数字は計算順序を表す．すると，T モデルの求解法は，ダミーの出発ノードから各地点番号 $\bar{x}$ かつ各車両番号 $\bar{n}$ の対応するノードへの 1 対多の最長経路探索問題と同じである．

有向非巡回グラフにおける最長経路探索問題は，効率的に計算できる¹⁶⁾．計算順序は図-4 の各格子点の左下にある数字の順である．

c) 異質性マクロ交通流モデルの確率的拡張

第 2.1.b) 節で示した異質性 T モデルを確率的に拡

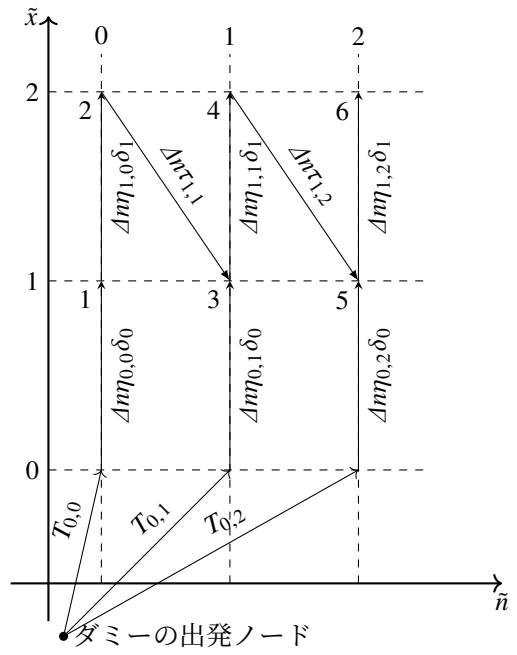


図-4 最長経路探索問題による T モデルの解法

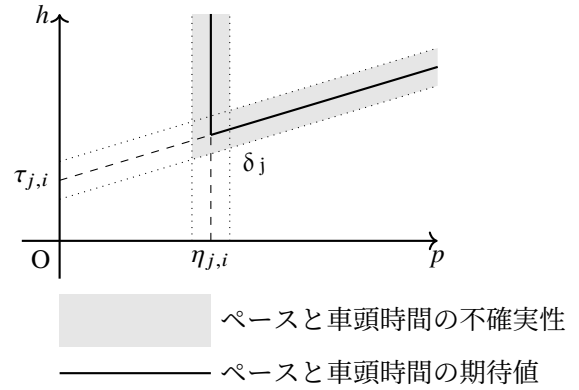


図-5 異質性と不確実性下での FD の概形

張する．具体的には， $\eta_{j,i}$ と $\tau_{j,i}$ が不確実で確率変数であるときに， $T_{\bar{x},\bar{n}}$ も確率変数となる確率的 T モデルを構築する．ここで， δ_j を確率変数とすると，ある地点番号 $\bar{x}$ あるいは区間番号 j に対応する地点あるいは区間の位置が確率的に変動するため，離散化誤差が発生する．そのため， δ_j は確率変数とせず，他の変数である $\eta_{j,i}$ ， $\tau_{j,i}$ ， $T_{\bar{x},\bar{n}}$ を確率変数として扱う．この FD は図-5 と表せる． $\eta_{j,i}$ と $\tau_{j,i}$ の不確実性の影響範囲を灰色で示した．

確率的 T モデルは異質性 T モデルと同様の境界条件から，自由流ペース，反応時間，T モデルの解の同時確率分布を定めるものである．境界条件を述べる． $\eta_{j,i}$ と $\tau_{j,i}$ ， $T_{0,i} - T_{0,i-1}$ はそれぞれ値が 0 以下になる確率が 0 であるような任意の連続確率分布に従うとする． $T_{0,0}$ は任意の連続確率分布に従うとする． δ_j は 0 より大きな実数とする．確率的 T モデルの計

算式は、式 (7) と同様に、

$$T_{\bar{x},\bar{n}} = \max(T_{\bar{x}-1,\bar{n}} + \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \eta_{\bar{x}-1,\bar{n}}, T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1} + \Delta n \tau_{\bar{x},\bar{n}}) \quad (10)$$

と表せる。

2.2 提案モデルの解析近似手法

第 2.1.c) 節で定式化した確率的 T モデルの厳密解を解析的に得るのは困難である。そこで、その解を一定の条件下で解析的に近似して求める手法を開発する。具体的には、Wada et.al.¹⁰⁾ の解析近似手法と同様に、 $T_{\bar{x},\bar{n}}$ は全ての格子点で正規分布に近似できると仮定する。そのために、第 2.2.a) 節で、その近似に基づき提案する確率的 T モデルの解の解析近似手法とその計算アルゴリズムを示す。

a) 確率的 T モデルの解析近似の計算手法

交通流の期待値と、分散、境界条件による勾配の解析近似を求める。確率変数 U の境界条件による勾配とは ∇U である。ただし、作用素 ∇ は、

$$\nabla = \sum_{k=0}^{N_U-1} \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial U_k} \quad (11)$$

である。ここで、 N_U は境界条件の確率変数の個数を、 $\vec{e}_k$ は k 番目の N_U 次元の標準基底ベクトルを、 U_k は k 番目の境界条件の確率変数を表す。この勾配は、交通状態の変化が最大となる境界条件の変化の方向を表すという重要性を持つため求める。ここで、表現を簡潔にするため式 (10) を最大化の前半の項 $t_{\bar{x},\bar{n}}^f$ 、後半の項 $t_{\bar{x},\bar{n}}^c$ 、最大化により得られた実際の通過時刻 $T_{\bar{x},\bar{n}}$ に分けて表す。つまり、

$$T_{\bar{x},\bar{n}} = \max(t_{\bar{x},\bar{n}}^f, t_{\bar{x},\bar{n}}^c) \quad (12)$$

$$t_{\bar{x},\bar{n}}^f = T_{\bar{x}-1,\bar{n}} + \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \eta_{\bar{x}-1,\bar{n}} \quad (13)$$

$$t_{\bar{x},\bar{n}}^c = T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1} + \Delta n \tau_{\bar{x},\bar{n}} \quad (14)$$

の期待値と、分散、境界条件による勾配を近似する。このとき、この 3 要素の関係を表したのが図-6 である。自由流状態での通過時刻である $t_{\bar{x},\bar{n}}^f$ と渋滞状態での通過時刻 $t_{\bar{x},\bar{n}}^c$ の分布を近似し、この 2 つから実際の通過時刻 $T_{\bar{x},\bar{n}}$ を近似する。ただし、ある確率変数 U に対して、期待値を $\mathbb{E}(U)$ 、分散を $\mathbb{V}(U)$ とする。また、境界条件の分散共分散行列を Σ とする。

前半の項の期待値と、分散、境界条件による勾配を求める。確率変数の和の性質より、これらは近似なしで、

$$\mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) = \mathbb{E}(T_{\bar{x}-1,\bar{n}}) + \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \mathbb{E}(\eta_{\bar{x}-1,\bar{n}}) \quad (15)$$

$$\mathbb{V}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) = \mathbb{V}(T_{\bar{x}-1,\bar{n}}) + \Delta n^2 \delta_{\bar{x}-1}^2 \mathbb{V}(\eta_{\bar{x}-1,\bar{n}}) + 2 \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \nabla T_{\bar{x}-1,\bar{n}}^\top \Sigma \nabla \eta_{\bar{x}-1,\bar{n}} \quad (16)$$

$$\nabla t_{\bar{x},\bar{n}}^f = \nabla T_{\bar{x}-1,\bar{n}} + \Delta n \delta_{\bar{x}-1} \nabla \eta_{\bar{x}-1,\bar{n}} \quad (17)$$

と表せる。

後半の項の期待値と、分散、境界条件による勾配を求める。確率変数の和の性質より、これらは近似なしで、

$$\mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c) = \mathbb{E}(T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1}) + \Delta n \mathbb{E}(\tau_{\bar{x},\bar{n}}) \quad (18)$$

$$\mathbb{V}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c) = \mathbb{V}(T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1}) + \Delta n^2 \mathbb{V}(\tau_{\bar{x},\bar{n}}) + \Delta n \nabla T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1}^\top \Sigma \nabla \tau_{\bar{x},\bar{n}} \quad (19)$$

$$\nabla t_{\bar{x},\bar{n}}^c = \nabla T_{\bar{x}+1,\bar{n}-1} + \Delta n \nabla \tau_{\bar{x},\bar{n}} \quad (20)$$

と表せる。

実際の通過時刻の期待値と、分散、境界条件による勾配を求める。 $T_{\bar{x},\bar{n}}$ の期待値と分散は、クラーク近似¹⁷⁾を用いると、

$$\mathbb{E}(T_{\bar{x},\bar{n}}) = \nu_1 \quad (21)$$

$$\mathbb{V}(T_{\bar{x},\bar{n}}) = \nu_2 - \nu_1^2 \quad (22)$$

と近似される。ここで、

$$\nu_1 = \mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) \Phi(\gamma) + \mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c) \Phi(-\gamma) + a \phi(\gamma) \quad (23)$$

$$\nu_2 = \left(\mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f)^2 + \mathbb{V}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) \right) \Phi(\gamma) + \left(\mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c)^2 + \mathbb{V}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c) \right) \Phi(-\gamma) \quad (24)$$

$$+ \left(\mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) + \mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c) \right) a \phi(\gamma) \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) - \mathbb{E}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c)}{a} \quad (26)$$

$$a = \sqrt{\mathbb{V}(t_{\bar{x},\bar{n}}^f) + \mathbb{V}(t_{\bar{x},\bar{n}}^c) - 2 \nabla t_{\bar{x},\bar{n}}^f{}^\top \Sigma \nabla t_{\bar{x},\bar{n}}^c} \quad (27)$$

である。ここで、 Φ は標準正規分布の累積確率密度関数を、 ϕ は標準正規分布の確率密度関数を表す。 $T_{\bar{x},\bar{n}}$ の境界条件による勾配は、式 (26) と式 (27) のもとで、

$$\nabla T_{\bar{x},\bar{n}} = \Phi(\gamma) \nabla t_{\bar{x},\bar{n}}^f + (1 - \Phi(\gamma)) \nabla t_{\bar{x},\bar{n}}^c \quad (28)$$

と近似される。

図-4 に示す離散化された図と同様に計算順序を表すと図-7 になる。各点は、地点番号 $\bar{x}$ で車両番号 $\bar{n}$ の $T_{\bar{x},\bar{n}}$ を表す。各点の左下にある数字は、計算順序を表す。丸がつけられた点は、現在計算される点を表す。各点の右下のベクトルは、その点に対応する $T_{\bar{x},\bar{n}}$ の期待値と、分散、境界条件による勾配をそれぞれ表す。また、各点に付随する矢印は、その点の計算に必要な前の点を表す。この矢印の費用と、 $T_{0,\bar{n}}$ が確率的 T モデルの境界条件である。この計算アルゴリズムを示すとアルゴリズム-1 のとおりである。アルゴリズム-1 は提案手法の計算方法を手続き的に

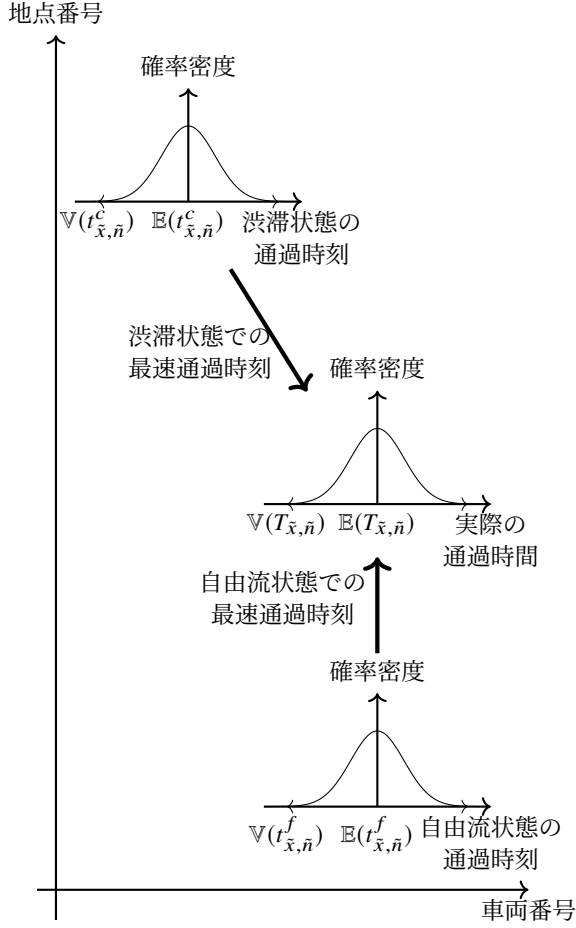


図-6 通過時刻の近似

示す。アルゴリズムの実行終了時に T モデルの解の期待値，分散，勾配が求められる。1 行目から 6 行目まで，先頭車両の通過時刻が計算される。7 行目から 32 行目まで，先頭車両を除いた車両の通過時刻が計算される。この内，8 行目から 26 行目までが，先行車両がいる場合の通過時刻計算に対応する。一方で，27 行目から 31 行目までが，最終地点の通過時刻計算に対応する。ただし，変数は表-1 のとおりである。また中間値として a ， γ ， v_1 ， v_2 を用いる。表-1 はアルゴリズム-1 で用いられるパラメータと出力値の説明を表す。出力値は，T モデルの解の期待値 $T_{\tilde{x}, \tilde{n}}^{\mathbb{E}}$ ，分散 $T_{\tilde{x}, \tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ ，勾配 $T_{\tilde{x}, \tilde{n}}^{\nabla}$ である。それ以外の変数は所与の値である。

b) 交通状態の近似手法

T モデルの $T(n, x)$ はある車両 n がある地点 x に到着する確率的旅行時間である。求まった $T_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ から，より扱いやすい交通状態変数，すなわち流率 q ，密度 k ，ペース p （速度の逆数），車頭時間 h （流率の逆数）を求める手法を構築する。

$T_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ の期待値と，分散，境界条件による勾配からペース，車頭時間，流率，密度の期待値と，分散，境

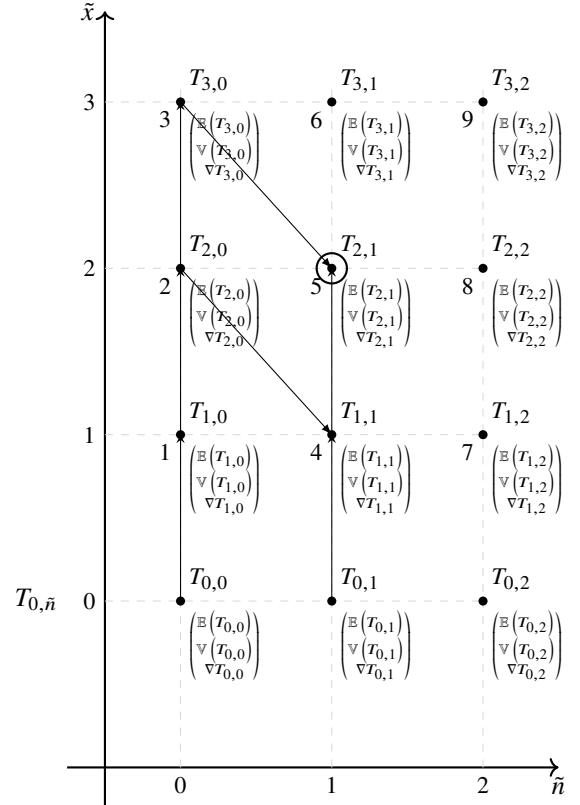


図-7 解析近似手法の逐次計算の順序

界条件による勾配を近似する。まず，ペース $p_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ は，中心差分法を用いると，

$$p_{\tilde{x}, \tilde{n}} = \frac{T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}} - T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}}{\Delta n (\delta_{\tilde{x}-1} + \delta_{\tilde{x}})} \quad (29)$$

と近似される。よって， $p_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ の期待値は，

$$\mathbb{E}(p_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \frac{\mathbb{E}(T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) - \mathbb{E}(T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}})}{\Delta n (\delta_{\tilde{x}-1} + \delta_{\tilde{x}})} \quad (30)$$

と表される。 $p_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ の分散は，

$$\mathbb{V}(p_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \frac{\mathbb{V}(T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) + \mathbb{V}(T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}})}{(\Delta n)^2 (\delta_{\tilde{x}-1} + \delta_{\tilde{x}})^2} - 2 \frac{\nabla T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}^{\top} \Sigma \nabla T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}}{(\Delta n)^2 (\delta_{\tilde{x}-1} + \delta_{\tilde{x}})^2} \quad (31)$$

と表される。 $p_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ の境界条件による勾配は，

$$\nabla p_{\tilde{x}, \tilde{n}} = \frac{\nabla T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}} - \nabla T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}}{\Delta n (\delta_{\tilde{x}-1} + \delta_{\tilde{x}})} \quad (32)$$

と表される。次に，車頭時間 $h_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ は，中心差分法を用いると，

$$h_{\tilde{x}, \tilde{n}} = \frac{T_{\tilde{x}, \tilde{n}+1} - T_{\tilde{x}, \tilde{n}-1}}{2 \Delta n} \quad (33)$$

と近似される。よって， $h_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ の期待値は，

$$\mathbb{E}(h_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \frac{\mathbb{E}(T_{\tilde{x}, \tilde{n}+1}) - \mathbb{E}(T_{\tilde{x}, \tilde{n}-1})}{2 \Delta n} \quad (34)$$

と表される。 $h_{\tilde{x}, \tilde{n}}$ の分散は，

表-1 確率的 T モデルの解析近似の計算手法で用いられる記号

記号	名称	説明
N_n	車両数	車両の総数
N_x	区間数	地点の総数
Δn	車両離散化幅	車両番号の離散化における幅
Σ	境界条件の分散共分散行列	境界条件の確率変数の分散共分散行列
$\eta_{j,i}^{\mathbb{E}}$	自由流ペースの期待値	区間 j で i の自由流ペース η の期待値
$\eta_{j,i}^{\mathbb{V}}$	自由流ペースの分散	区間 j で i の自由流ペース η の分散
$\eta_{j,i}^{\mathbb{V}}$	自由流ペースの勾配	区間 j で i の自由流ペース η の境界条件による勾配
$\tau_{j,i}^{\mathbb{E}}$	反応時間の期待値	区間 j で i の反応時間 τ の期待値
$\tau_{j,i}^{\mathbb{V}}$	反応時間の分散	区間 j で i の反応時間 τ の分散
$\tau_{j,i}^{\mathbb{V}}$	反応時間の勾配	区間 j で i の反応時間 τ の境界条件による勾配
δ_j	停車時車頭距離	区間番号 j における停車時車頭距離
$T_{\bar{x},\bar{n}}^{\mathbb{E}}$	T モデルの解の期待値	地点 $\bar{x}$ で車両 $\bar{n}$ の T モデルの解の期待値
$T_{\bar{x},\bar{n}}^{\mathbb{V}}$	T モデルの解の分散	地点 $\bar{x}$ で車両 $\bar{n}$ の T モデルの解の分散
$T_{\bar{x},\bar{n}}^{\mathbb{V}}$	T モデルの解の勾配	地点 $\bar{x}$ で車両 $\bar{n}$ の T モデルの解の境界条件による勾配

$$\mathbb{V}(h_{\bar{x},\bar{n}}) = \frac{\mathbb{V}(T_{\bar{x},\bar{n}+1}) + \mathbb{V}(T_{\bar{x},\bar{n}-1})}{(2\Delta n)^2} - \frac{\nabla T_{\bar{x},\bar{n}+1}^{\mathbb{T}} \Sigma \nabla T_{\bar{x},\bar{n}-1}}{2(\Delta n)^2} \quad (35)$$

と表される。 $h_{\bar{x},\bar{n}}$ の境界条件による勾配は、

$$\nabla h_{\bar{x},\bar{n}} = \frac{\nabla T_{\bar{x},\bar{n}+1} - \nabla T_{\bar{x},\bar{n}-1}}{2\Delta n} \quad (36)$$

と表される。そして、流率 $q_{\bar{x},\bar{n}}$ は、

$$q_{\bar{x},\bar{n}} = \frac{1}{h_{\bar{x},\bar{n}}} \quad (37)$$

と表される。このとき、 $q_{\bar{x},\bar{n}}$ の期待値と分散は、中村¹⁸⁾の方法を用いて近似すると、

$$\mathbb{E}(q_{\bar{x},\bar{n}}) = \frac{1}{\mathbb{E}(h_{\bar{x},\bar{n}})} + \frac{\mathbb{V}(h_{\bar{x},\bar{n}})}{\mathbb{E}(h_{\bar{x},\bar{n}})^3} \quad (38)$$

$$\mathbb{V}(q_{\bar{x},\bar{n}}) = \frac{\mathbb{V}(h_{\bar{x},\bar{n}})}{\mathbb{E}(h_{\bar{x},\bar{n}})^4} - \frac{\mathbb{V}(h_{\bar{x},\bar{n}})^2}{\mathbb{E}(h_{\bar{x},\bar{n}})^6} \quad (39)$$

と近似される。 $q_{\bar{x},\bar{n}}$ の境界条件による勾配は、

$$\nabla q_{\bar{x},\bar{n}} = -\frac{1}{\mathbb{E}(h_{\bar{x},\bar{n}})^2} \nabla h_{\bar{x},\bar{n}} \quad (40)$$

と表される。最後に、密度 $k_{\bar{x},\bar{n}}$ は、

$$k_{\bar{x},\bar{n}} = p_{\bar{x},\bar{n}} q_{\bar{x},\bar{n}} \quad (41)$$

と表される。ここから、 $k_{\bar{x},\bar{n}}$ の期待値は、

$$\mathbb{E}(k_{\bar{x},\bar{n}}) = \mathbb{E}(p_{\bar{x},\bar{n}}) \mathbb{E}(q_{\bar{x},\bar{n}}) + \nabla p_{\bar{x},\bar{n}}^{\mathbb{T}} \Sigma \nabla q_{\bar{x},\bar{n}} \quad (42)$$

と近似される。 $k_{\bar{x},\bar{n}}$ の分散は、

$$\mathbb{V}(k_{\bar{x},\bar{n}}) = \mathbb{E}(p_{\bar{x},\bar{n}})^2 \mathbb{V}(q_{\bar{x},\bar{n}}) + \mathbb{V}(p_{\bar{x},\bar{n}}) \mathbb{E}(q_{\bar{x},\bar{n}})^2 + 2\mathbb{E}(p_{\bar{x},\bar{n}}) \mathbb{E}(q_{\bar{x},\bar{n}}) \nabla p_{\bar{x},\bar{n}}^{\mathbb{T}} \Sigma \nabla q_{\bar{x},\bar{n}} \quad (43)$$

と近似される。 $k_{\bar{x},\bar{n}}$ の境界条件による勾配は、

$$\nabla k_{\bar{x},\bar{n}} = \mathbb{E}(q_{\bar{x},\bar{n}}) \nabla p_{\bar{x},\bar{n}} + \mathbb{E}(p_{\bar{x},\bar{n}}) \nabla q_{\bar{x},\bar{n}} \quad (44)$$

と表される。以上より、T モデルの境界条件の確率分布から交通状態の確率分布を近似した。

3. 提案手法の性質

提案モデルがもつ性質を示す。提案モデルを用い、stop-and-go 波の波長と周期を求める。まず、stop-and-go 波はペースの時空間的な相関関係分布として現れると論ずる。次に、その符号がどのように変化するかを求める。そして、この符号変化の周期と波長を求める。なお、各 FD のパラメータが区間や車両ごとに独立である場合と仮定する。

3.1 ペースの相関係数分布と stop-and-go 波の関係

Stop-and-go 波とは、渋滞中に車両が減速と加速を繰り返す現象である⁷⁾。図-1 の通り stop-and-go 波では、ボトルネックを先頭にした渋滞領域内で高密度と低密度の領域が交互に発生する。同様に、様々な交通状態が高い領域と低い領域が交互に発生する。

Stop-and-go 波の交通状態の傾向をある基準点近傍で確認する。このとき、交通状態は車両の進行方向の近傍の点と似た傾向を示し、車両の進行方向の遠方の点とは逆の傾向を示す。Stop-and-go 波が三角関数を用いて表せる場合、交通状態の分布とその相関は図-8 になる。図-8 において、基準点近傍で正の相関が得られ、基準点遠方で負の相関が得られると確

アルゴリズム-1 T モデルの計算アルゴリズム

```

1: for  $\tilde{x} \leftarrow (1, 2, \dots, N_x - 1)$  do
2:    $T_{\tilde{x},0}^{\mathbb{B}} \leftarrow T_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{B}} + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \eta_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{B}}$ 
3:    $T_{\tilde{x},1}^{\mathbb{V}} \leftarrow 2 \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} T_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{V}} + \sum \eta_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{V}}$ 
4:    $T_{\tilde{x},0}^{\mathbb{V}} \leftarrow T_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{V}} + \Delta n^2 \delta_{\tilde{x}-1}^2 \eta_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{V}} + T_{\tilde{x},1}^{\mathbb{V}}$ 
5:    $T_{\tilde{x},0}^{\mathbb{V}} \leftarrow T_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{V}} + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \eta_{\tilde{x}-1,0}^{\mathbb{V}}$ 
6: end for
7: for  $\tilde{n} \leftarrow (1, 2, \dots, N_n - 1)$  do
8:   for  $\tilde{x} \leftarrow (1, 2, \dots, N_x - 2)$  do
9:      $t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{B}} \leftarrow T_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{B}} + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \eta_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{B}}$ 
10:     $t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} \leftarrow 2 \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} T_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + \sum \eta_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
11:     $t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} \leftarrow T_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + \Delta n^2 \delta_{\tilde{x}-1}^2 \eta_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}}$ 
12:     $t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} \leftarrow T_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \eta_{\tilde{x}-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
13:     $t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{B}} \leftarrow T_{\tilde{x}+1,\tilde{n}-1}^{\mathbb{B}} + \Delta n \tau_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{B}}$ 
14:     $t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}} \leftarrow \Delta n T_{\tilde{x}+1,\tilde{n}-1}^{\mathbb{V}} + \sum \tau_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
15:     $t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}} \leftarrow T_{\tilde{x}+1,\tilde{n}-1}^{\mathbb{V}} + \Delta n^2 \tau_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}}$ 
16:     $t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}} \leftarrow T_{\tilde{x}+1,\tilde{n}-1}^{\mathbb{V}} + \Delta n \tau_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
17:     $t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{f,\mathbb{B}} \leftarrow 2 t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} + \sum \tau_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
18:     $a \leftarrow \sqrt{2 t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} + t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}} - t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{f,\mathbb{B}}}$ 
19:     $\gamma \leftarrow \frac{t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{B}} - t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{B}}}{a}$ 
20:     $v_1 \leftarrow t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{B}} \Phi(\gamma) + t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{B}} \Phi(-\gamma) + a \phi(\gamma)$ 
21:     $t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{c,\mathbb{B}} \leftarrow \left( t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{B}} + t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} \right) \Phi(\gamma)$ 
22:     $v_2 \leftarrow \left( t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{B}} + t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}} \right) \Phi(-\gamma) + t_{\tilde{x}+1,\tilde{n}}^{c,\mathbb{B}}$ 
23:     $T_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{B}} \leftarrow v_1$ 
24:     $T_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{V}} \leftarrow v_2 - v_1^2$ 
25:     $T_{\tilde{x},\tilde{n}}^{\mathbb{V}} \leftarrow \Phi(\gamma) t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{f,\mathbb{V}} + (1 - \Phi(\gamma)) t_{\tilde{x},\tilde{n}}^{c,\mathbb{V}}$ 
26:   end for
27:    $T_{N_x-1,\tilde{n}}^{\mathbb{B}} \leftarrow T_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{B}} + \Delta n \delta_{N_x-2} \eta_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{B}}$ 
28:    $a \leftarrow 2 \Delta n \delta_{N_x-2} T_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + \sum \eta_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
29:    $\gamma \leftarrow \Delta n^2 \delta_{N_x-2}^2 \eta_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + a$ 
30:    $T_{N_x-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} \leftarrow T_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + \gamma$ 
31:    $T_{N_x-1,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} \leftarrow T_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{V}} + \Delta n \delta_{N_x-2} \eta_{N_x-2,\tilde{n}}^{\mathbb{V}}$ 
32: end for

```

認できる．よって，stop-and-go 波はペースなどの交通状態の相関係数分布として現れる．

3.2 ペースの相関係数分布の符号変化

式 (10) の解析近似を用いると，T モデルの共分散に対して定理 1 が成立する．

定理 1 各 FD のパラメータが区間や車両ごとに独立であり，交通流が自由流状態あるいは渋滞状態に完全に分類できるとき，車両数 N_n ，地点数 N_x として， $\forall \tilde{x}, \tilde{x}_b \in 0, 1, \dots, N_x - 1$ ， $\forall \tilde{n}, \tilde{n}_b \in 0, 1, \dots, N_n - 1$ に対して，式 (45) と式 (46) が成立する．

交通状態

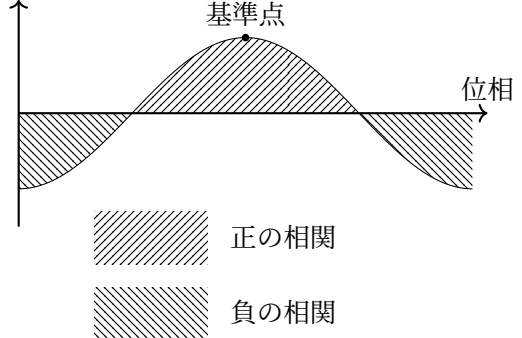


図-8 交通状態と相関係数の関係

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, \eta_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (45)$$

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}-1}) + \Delta n \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, \tau_{\tilde{x}, \tilde{n}}) \quad (46)$$

ただし，式 (45) は自由流状態でのみ成立し，式 (46) は先行車両を除いて渋滞状態でのみ成立する．

定理 1 を証明する．

証明 自由流状態である場合に，式 (10) は，

$$T_{\tilde{x}, \tilde{n}} = T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}} + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \eta_{\tilde{x}-1, \tilde{n}} \quad (47)$$

である． $\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は，共分散の定義より，

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) + \Delta n \delta_{\tilde{x}-1} \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, \eta_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (48)$$

となる．よって，式 (45) が示された．

渋滞状態である場合に，式 (10) は，

$$T_{\tilde{x}, \tilde{n}} = T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}-1} + \Delta n \tau_{\tilde{x}, \tilde{n}} \quad (49)$$

である． $\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は，共分散の定義より，

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}-1}) + \Delta n \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, \tau_{\tilde{x}, \tilde{n}}) \quad (50)$$

である．よって，式 (46) が示された．以上により，定理 1 が証明された．□

相関係数の符号と共分散の符号は一致するため，ペースの共分散 $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ の符号を求める． $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ の符号に関して定理 1 より，定理 2 と定理 3 が成立する．

定理 2 自由流状態ならば車両数 N_n ，地点数 N_x として， $\forall \tilde{x}, \tilde{x}_b \in 1, 2, \dots, N_x - 2$ ， $\forall \tilde{n}, \tilde{n}_b \in 1, 2, \dots, N_n - 2$ に対して，

$$\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \begin{cases} \geq 0 & \tilde{n}_b = \tilde{n} \\ = 0 & \tilde{n}_b \neq \tilde{n} \end{cases} \quad (51)$$

が成立する.

定理 3 渋滞状態ならば車両数 N_n , 地点数 N_x として, $\forall \tilde{x}, \tilde{x}_b \in 1, 2, \dots, N_x - 2$, $\forall \tilde{n}, \tilde{n}_b \in 1, 2, \dots, N_n - 2$ に対して,

$$\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \begin{cases} \geq 0 & \text{if } |\tilde{n}_b + \tilde{x}_b - \tilde{n} - \tilde{x}| < 2 \\ = 0 & \text{if } |\tilde{n}_b + \tilde{x}_b - \tilde{n} - \tilde{x}| > 2 \\ < 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (52)$$

が成立する.

ある点 $(\tilde{x}_b, \tilde{n}_b)$ を基準として異なる点 $(\tilde{x}, \tilde{n})$ のペースの共分散の符号を求める. このとき, $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ の符号は, 共分散の性質と中心差分法より,

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) - \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (53)$$

$$- \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) + \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (54)$$

の符号と等しい. 最初に定理 2 を証明する.

証明 ここで $(\tilde{n}_b, \tilde{x}_b)$ と $(\tilde{n}, \tilde{x})$ は互いに置換可能であるため, $\tilde{n}_b \leq \tilde{n}$ においても一般性を失わない. $\tilde{n}_b = \tilde{n}$ ならば, 定理 1 より明らかに

$$\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}}) \geq 0$$

である.

$\tilde{n}_b < \tilde{n}$ ならば, このとき, 定理 1 より,

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (55)$$

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (56)$$

である. そのため, $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は 0 である. よって, 定理 2 が示された. $\square$

定理 3 を証明する.

証明 ここで $(\tilde{n}_b, \tilde{x}_b)$ と $(\tilde{n}, \tilde{x})$ は互いに置換可能であるため, $\tilde{n}_b + \tilde{x}_b \leq \tilde{n} + \tilde{x}$ においても一般性を失わない. $\tilde{n}_b + \tilde{x}_b$ と $\tilde{n} + \tilde{x}$ の差の関係に基づき, 以下の 4 つの場合に分けて考える.

まず, $\tilde{n}_b + \tilde{x}_b + 2 < \tilde{n} + \tilde{x}$ の場合, 定理 1 より,

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (57)$$

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (58)$$

が成立する. そのため, $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は 0 である.

次に, $\tilde{n}_b + \tilde{x}_b + 2 = \tilde{n} + \tilde{x}$ の場合, 定理 1 より,

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) \quad (59)$$

が成立する. また, $\tilde{n}_b < \tilde{n}$ ならば, 定理 1 より

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}) \quad (60)$$

である. 一方で $\tilde{n}_b \geq \tilde{n}$ ならば, 定理 1 より

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}-1, \tilde{n}}) &= \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}) \\ &- \sum_{i=\tilde{n}}^{\tilde{n}_b} \Delta n \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, \tau_{\tilde{x}_b+\tilde{n}_b+1-i, i}) \end{aligned} \quad (61)$$

である. 同様に $\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}})$ は定理 1 より

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) &= \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}) \\ &- \sum_{i=0}^{\tilde{n}_b} \Delta n \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, \tau_{\tilde{x}_b+\tilde{n}_b+1-i, i}) \end{aligned} \quad (62)$$

となる. よって, $\tilde{n}_b$ と $\tilde{n}$ の大小関係に関わらず, $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は負である.

3 つめに $\tilde{n}_b + \tilde{x}_b + 1 = \tilde{n} + \tilde{x}$ の場合, 定理 1 より $\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}})$ は

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) &= \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}) \\ &- \sum_{i=0}^{\tilde{n}_b-1} \Delta n \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, \tau_{\tilde{x}_b+\tilde{n}_b+1-i, i}) \end{aligned} \quad (63)$$

となる. $\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}})$ は定理 1 より

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}+1, \tilde{n}}) &= \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}) \\ &- \sum_{i=0}^{\tilde{n}_b} \Delta n \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, \tau_{\tilde{x}_b+\tilde{n}_b+1-i, i}) \end{aligned} \quad (64)$$

となる. よって, $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は正である.

最後に $\tilde{n}_b + \tilde{x}_b = \tilde{n} + \tilde{x}$ の場合を求める. まず, $\tilde{n} = \tilde{n}_b$ のとき明らかに $\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}})$ は正の値を取る. よって, $\tilde{n} = \tilde{n}_b + k$ とすると $k > 0$ としても一般性を失わない. そのため,

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-k+1, \tilde{n}_b+k}) = \mathbb{V}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}) \quad (65)$$

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-k-1, \tilde{n}_b+k}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}) \quad (66)$$

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-k+1, \tilde{n}_b+k}) = \mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}) \quad (67)$$

$$\mathbb{C}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}, T_{\tilde{x}_b-k-1, \tilde{n}_b+k}) = \mathbb{V}(T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}) \quad (68)$$

となる. よって,

$$\mathbb{C}(p_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b}, p_{\tilde{x}, \tilde{n}}) = \mathbb{V}(T_{\tilde{x}_b+1, \tilde{n}_b} - T_{\tilde{x}_b-1, \tilde{n}_b}) \geq 0 \quad (69)$$

となる. 以上より定理 3 が示された. $\square$

定理 2 より, 自由流状態であれば共分散の空間分布は縞模様が呈しない. 一方で, 定理 3 より, 渋滞状態であれば縞模様を呈すとわかる. 定理 3 を図示すると図-9 になる.

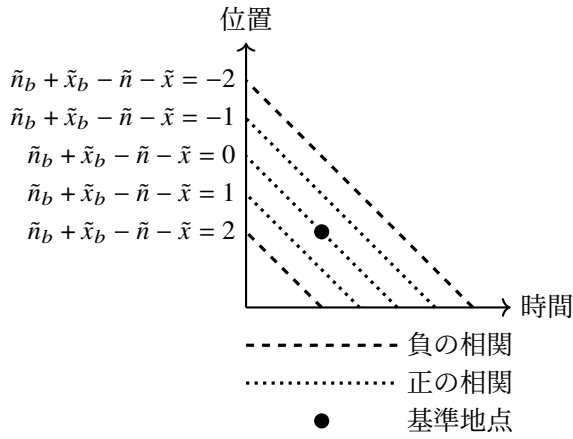


図-9 Stop-and-go 波の発生時の相関係数分布

3.3 Stop-and-go 波の性質

定理 3 より、渋滞状態において不確実性により交通状態の共分散が縞模様の模様を呈するとわかる。この縞模様は、第 3.1 節より、stop-and-go 波との関係がある。ここで、共分散の縞模様の周期と波長を計算する。計算にあたり、FD のパラメータが同一の区間番号 j 、車両番号 i を考える。

まず、ある区間番号 j で車両番号 i での縞模様の周期 $\Upsilon_{j,i}$ を計算する。定常状態のペースを p_e とすると、定常状態の車頭時間 h_e は式 (6) より、

$$h_e = \tau_{j,i} + \delta_j p_e \quad (70)$$

となる。 $\Upsilon_{j,i}$ は、同一地点における時間方向の長さである。これは定理 3 より $4\Delta n$ 台分の車頭時間であるため、 $\Upsilon_{j,i}$ は、

$$\Upsilon_{j,i} = 4\Delta n(\tau_{j,i} + \delta_j p_e) \quad (71)$$

となる。

次に、ある区間番号 j で車両番号 i での縞模様の波長 $\lambda_{j,i}$ を計算する。このとき、基準地点番号 $\tilde{x}_b$ と基準車両番号 $\tilde{n}_b$ 近傍の通過時刻 T は、全微分を用いると、

$$T = T_{\tilde{x}_b, \tilde{n}_b} + p_e \Delta n \delta_j (\tilde{x} - \tilde{x}_b) + h_e \Delta n (\tilde{n} - \tilde{n}_b) \quad (72)$$

と近似される。式 (72) より時刻が一定の条件での車両番号と地点番号変化の関係は、

$$\tilde{n} - \tilde{n}_b = -\frac{p_e \delta_j}{h_e} (\tilde{x} - \tilde{x}_b) \quad (73)$$

となる。縞模様の範囲は、定理 3 より $-2 \leq \tilde{n}_b + \tilde{x}_b - \tilde{n} - \tilde{x} \leq 2$ となる。式 (72) の $\tilde{x}$ の値域の実際の長さが $\lambda_{j,i}$ であるから、 $\lambda_{j,i}$ は、

$$\lambda_{j,i} = 4\Delta n \delta_j \frac{\tau_{j,i} + \delta_j p_e}{\tau_{j,i}} \quad (74)$$

となる。

Stop-and-go 波が $t-x$ 平面上を伝わる波だと仮定する。このとき、ある区間番号 j で車両番号 i での位相速度 $c_{j,i}$ は、

$$c_{j,i} = \frac{\lambda_{j,i}}{\Upsilon_{j,i}} = \frac{\delta_j}{\tau_{j,i}} \quad (75)$$

となる。これは後進波速度と一致する。位相が一定の点は同一の交通状態を持つため、位相速度は交通状態が上流に伝播する速度と解釈できる。これはただの後進波であり、stop-and-go 波ではない。

3.4 既往研究との比較

第 3.4 節では、既往研究^{1), 2), 7)} で明らかにされた交通流の特性と、提案モデルの性質の関係を述べる。具体的には、既往研究での stop-and-go 波の機序と提案モデルでの定式化の関係を述べる。

次に、多くの既往研究^{2), 7)} では、stop-and-go 波の発生に車両内異質性が必要であると指摘されている。提案モデルにおいても、車両ごとの FD パラメータが区間ごとに独立であるという仮定のもとでの stop-and-go 波の発生を第 3.1 節で示した。ここで、本モデルにおいて、 $\tau_{j,i}$ がその期待値よりも小さい値を取る場合の車両を積極的な運転者、 $\tau_{j,i}$ がその期待値よりも大きい値を取る場合の車両を臆病な運転者に対応させると、これは Laval ら⁷⁾ が明らかにした stop-and-go 波の機序と整合的である。また、これらの対応関係は、Zheng ら²⁾ の希望車頭時間変化とも整合する。

Stop-and-go 波の発生には加速度制約が重要であると指摘されている^{2), 19)}。提案モデルは Laval ら¹⁴⁾ が提案したマクロ交通流モデルの拡張であるため、それには加速度制約が含まれない。ただし、提案モデルでは加速度制約により発生する車頭時間変化を $\tau_{j,i}$ の変化により擬似的に再現しているとみなせる可能性がある。

4. 数値実験

提案モデルの数値実験を 2 つの目的のために実施する。1 つめの目的は、解析近似手法の精度の検証である。2 つめの目的は、stop-and-go 波の再現可能性の検証である。

第一に、本手法の精度を検証する。解析近似手法は、確率分布の計算のために近似を行った。この近似の結果として得られた確率分布は真の分布と一般に一致しないため、近似精度の評価が必要である。今回は、解析近似手法と、多大なサンプル数を用い

れば精度の良い数値近似解が得られるモンテカルロ法で得られた密度の期待値と標準偏差を比較し近似精度を確認する。

第二に、不確実性による stop-and-go 波の再現可能性を明らかにする。提案モデルで、不確実性の条件を変更した際に stop-and-go 波の発生有無の変化を確認する。また、その変化が既往研究^{2),7)}と同様か確認する。

以下では、まず、数値実験の計算条件を示す。そして、得られた結果を示す。最後に、考察を述べる。

4.1 計算条件

ボトルネックのある高速道路を模したシナリオを用い、渋滞のある交通流での提案モデルの精度と性質を確認する。そのための計算条件を示す。

計算の際に、ボトルネックを2通りで表現する。自由流ペースボトルネックでは、ボトルネックを自由流ペースの増加により表す。反応時間ボトルネックでは、ボトルネックを反応時間の増加により表す。このとき、自由流ペースボトルネックでは、ボトルネックで車両は自由流状態になり、反応時間ボトルネックでは、車両は追従状態になる。そのために、反応時間ボトルネックのほうが自然なパラメータ設定であるといえる。しかし、この設定では解析近似での stop-and-go 波の分析が困難な場合がある（詳細は第4.3.d節で後述）ため、その分析のために自由流ペースボトルネックを主に用い、反応時間ボトルネックの結果は補助的に用いる。

まず、リンクと計算の設定を述べる。対象とするリンクは全長500mの1車線道路である。計算対象の車両台数は40台である。車両離散化幅 Δn は1台とする。また、地点離散化幅 Δx は区間によらず10mで一定とする。

次に、自由流ペースボトルネックでのFDのパラメータの設定条件を述べる。 Δx が区間によらず10mであるため、停車時車頭距離 δ_j も区間によらず10mで一定とする。自由流ペース $\eta_{j,i}$ と反応時間は $\tau_{j,i}$ はそれぞれ、全車両と区間で同一の平均値、車両別の補正量、区間別の補正量、区間と車両別の補正量、の和で表せられるとする。自由流ペース $\eta_{j,i}$ は、式(76)から(80)の通り設定される。ただし、 $N(\mu, \sigma^2)$ は平均が μ で標準偏差 σ であるような正規分布を表す。

$$\eta_{j,i} = \bar{\eta} + \Delta\eta_j^X + \Delta\eta_i^N + \Delta\eta_{j,i} \quad (76)$$

$$\bar{\eta} \sim N(0.05, 0.006^2) \quad (77)$$

$$\Delta\eta_j^X \sim \begin{cases} N(0, 0.006^2) & \text{if } 0 \leq j \leq 30 \\ N(0.2, 0.006^2) & \text{if } 30 < j \leq 40 \\ N(0, 0.006^2) & \text{if } 40 < j \leq 50 \end{cases} \quad \forall j \quad (78)$$

$$\Delta\eta_i^N \sim N(0, 0.006^2) \quad \forall i \quad (79)$$

$$\Delta\eta_{j,i} \sim N(0, 0.006^2) \quad \forall j, \forall i \quad (80)$$

ただし、 $\bar{\eta}$ は区間や車両によらない平均的な自由流ペースを、 $\Delta\eta_j^X$ は区間ごとの自由流ペースの変化量を、 $\Delta\eta_i^N$ は車両ごとの自由流ペースの変化量を、 $\Delta\eta_{j,i}$ は区間と車両ごとの自由流ペースの変化量を表す。また、単位は m/s である。反応時間 $\tau_{j,i}$ は、式(81)から(85)の通り設定される。

$$\tau_{j,i} = \bar{\tau} + \Delta\tau_j^X + \Delta\tau_i^N + \Delta\tau_{j,i} \quad (81)$$

$$\bar{\tau} \sim N(2, 0.7^2) \quad (82)$$

$$\Delta\tau_j^X \sim N(0, 0.7^2) \quad \forall j \quad (83)$$

$$\Delta\tau_i^N \sim N(0, 0.7^2) \quad \forall i \quad (84)$$

$$\Delta\tau_{j,i} \sim N(0, 0.7^2) \quad \forall j, \forall i \quad (85)$$

ただし、 $\bar{\tau}$ は区間や車両によらない平均的な反応時間を、 $\Delta\tau_j^X$ は区間ごとの反応時間の変化量を、 $\Delta\tau_i^N$ は車両ごとの反応時間の変化量を、 $\Delta\tau_{j,i}$ は区間と車両ごとの反応時間の変化量を表す。また、単位は s である。

反応時間ボトルネックでのFDのパラメータの設定条件を述べる。 Δx が区間によらず10mであるため、停車時車頭距離 δ_j も区間によらず10mで一定とする。自由流ペース $\eta_{j,i}$ は、式(86)から(90)の通り設定される。

$$\eta_{j,i} = \bar{\eta} + \Delta\eta_j^X + \Delta\eta_i^N + \Delta\eta_{j,i} \quad (86)$$

$$\bar{\eta} \sim N(0.05, 0.006^2) \quad (87)$$

$$\Delta\eta_j^X \sim N(0, 0.006^2) \quad \forall j \quad (88)$$

$$\Delta\eta_i^N \sim N(0, 0.006^2) \quad \forall i \quad (89)$$

$$\Delta\eta_{j,i} \sim N(0, 0.006^2) \quad \forall j, \forall i \quad (90)$$

また、単位は m/s である。反応時間 $\tau_{j,i}$ は、式(91)から(95)の通り設定される。

$$\tau_{j,i} = \bar{\tau} + \Delta\tau_j^X + \Delta\tau_i^N + \Delta\tau_{j,i} \quad (91)$$

$$\bar{\tau} \sim N(2, 0.7^2) \quad (92)$$

$$\Delta\tau_j^X \sim \begin{cases} N(0, 0.7^2) & \text{if } 0 \leq j \leq 30 \\ N(2, 0.7^2) & \text{if } 30 < j \leq 40 \\ N(0, 0.7^2) & \text{if } 40 < j \leq 50 \end{cases} \quad \forall j \quad (93)$$

$$\Delta\tau_i^N \sim N(0, 0.7^2) \quad \forall i \quad (94)$$

$$\Delta\tau_{j,i} \sim N(0, 0.7^2) \quad \forall j, \forall i \quad (95)$$

また、単位は s である。

不確実性の組み合わせは表-2 のとおりとする。各条件の設定は、名称に含まれる文字に基づき決定される。A は全車両および区間に共通する平均値の不確実性を、S は区間の不確実性を、V は車両の不確実性を、I は区間と車両別の不確実性をそれぞれ扱う場合に条件の名称に含まれる。不確実性がある場合は自由流ペースボトルネックでは式 (76) から (85) の、反応時間ボトルネックでは式 (86) から (95) の正規分布を用いる。一方で、不確実性がない場合はそれらの期待値と等しい確定的な実数を設定する。なお、D が含まれる場合は不確実性を扱わない設定とする。

リンク流入時刻の設定を述べる。車両番号 $\tilde{n}$ の車両は時刻 $3.4\tilde{n}$ s にリンク上端に到着するとする。

モンテカルロ法の一回の計算では、上記の確率変数の値をサンプリングにより実現値を定め、その変数値の下で確定的な異質性 T モデル (式 (7)) を計算し、確定的な解を求める。そして、異なる乱数シードを用いた 10 000 サンプルを集計し、その分布を得る。

自由流ペースボトルネックでの周期と波長の評価手順を述べる。モンテカルロ法により 10 000 サンプルの計算結果を取得し、以下の 3 つの手順で計算する。一つ目に、各サンプルごとに解析対象とする密度データを抽出する。周期の解析には、地点 200 m における 100 s から 136 s までの時間密度分布を用いる。波長の解析には、時刻 120 s における 100 m から 300 m までの空間密度分布を用いる。抽出範囲は、確実に渋滞状態である領域として選択した。なお、T モデルからは離散的な車両と地点に対する密度が得られるため、地点ごとに密度を時間方向に区線形補間し、特定時刻かつ特定地点における密度を推定する。二つ目に、各サンプルごとに時間方向あるいは空間方向に密度分布に対してフーリエ変換を行う。各サンプルごとに、抽出した密度系列データの平均密度を計算する。そして、平均密度と各時刻または各地点ごとの密度の偏差を計算し、偏差に対してハミング窓関数を適用する。その後、ハミング窓を適用した系列データに対して離散フーリエ変換を行い、波長および周期ごとのフーリエ振幅を算出する。三つ目に、全サンプルのフーリエ振幅を集計し、波長および周期ごとの累積確率分布を求める。

4.2 計算結果

表-3 と表-4 に各条件ごとの計算結果を示す。ここで、モンテカルロ法の単一サンプルに対して高密度な領域と低密度な領域が交互に存在するならば、stop-and-go 波が発生したとする。ここから、区間と

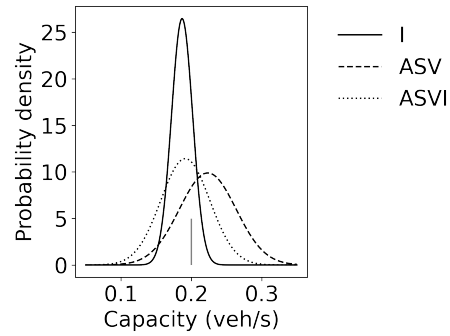


図-10 ボトルネックでの交通容量分布

車両別の不確実性が stop-and-go 波の発生に寄与するとわかる。

自由流ペースボトルネックでの、条件 I、条件 ASV、条件 ASVI でのボトルネックの交通容量の確率密度分布は図-10 となる。図-10 の灰色の縦棒は異質性がない場合の交通容量を表す。ここから条件 I と条件 ASVI では異質性により交通容量の期待値が低下したとわかる。

それぞれ図-11 に条件 I での、図-12 に条件 ASV での、図-13 に条件 ASVI での自由流ペースボトルネックのもとでの解析近似とモンテカルロ法で計算された交通状態と相関係数分布を表す。図より条件ごとに手法によらず同様の密度の期待値と標準偏差の分布が得られたとわかる。図のペースの相関係数分布はその位置のペースと基準のペースとの相関係数の分布を表す。ここで黒丸は相関係数分布を計算する際の基準を表す。各点の色はその時刻のその位置のペースと基準のペースとの相関係数を表す。ここから、条件 I では定理 3 と同様の結果が得られたとわかる。モンテカルロ法の単一サンプルの密度分布は、計算したモンテカルロ法における、ある一つのサンプルでの密度分布を表す。この結果は、交通状態の確率分布に従う、実際に実現する交通状態の 1 例である。ここから、条件 I と条件 ASVI では stop-and-go 波が発生しているといえる。一方で、条件 ASV では stop-and-go 波が発生しているといえない。

同様に、反応時間ボトルネックでの条件 I の結果を図-14 に、条件 ASVI の結果を図-15 に示す。図より条件ごとに手法によらず同様の密度の期待値と標準偏差の分布が得られたとわかる。モンテカルロ法の単一サンプルの結果より条件 I と条件 ASVI では stop-and-go 波が発生しているといえる。

自由流ペースボトルネックにおいて、条件 I でモンテカルロ法から得られた各サンプルから得られた周期と波長の累積確率分布は、図-16 となる。特定の累積確率において振幅が大きいほど、その周期ま

表-2 不確実性の組み合わせ

条件名	平均の不確実性	区間の不確実性	車両の不確実性	区間と車両の不確実性
D	なし	なし	なし	なし
A	あり	なし	なし	なし
S	なし	あり	なし	なし
V	なし	なし	あり	なし
AS	あり	あり	なし	なし
AV	あり	なし	あり	なし
SV	なし	あり	あり	なし
ASV	あり	あり	あり	なし
I	なし	なし	なし	あり
AI	あり	なし	なし	あり
SI	なし	なし	あり	あり
VI	なし	あり	なし	あり
ASI	あり	あり	なし	あり
AVI	あり	なし	あり	あり
SVI	なし	あり	あり	あり
ASVI	あり	あり	あり	あり

たは波長の影響が大きいと言える。そのため、周期と波長はそれぞれ、18s と 90m の影響が大きいとわかる。

4.3 考察

a) 計算精度

本手法の精度を検証する。2乗平均平方根誤差 (root-mean-square error: RMSE) を密度の期待値と標準偏差に対して計算すると自由流ペースボトルネックでは表-3 に、反応時間ボトルネックでは表-4 になる。ここから計算誤差が大きくないと言える。自由流ペースボトルネックにおいて条件 I では図-11a と図-11b を比較すると手法ごとに推定されたおおよその密度の期待値が一致しているとわかる。また、図-11c と図-11d を比較すると手法ごとに推定されたおおよそ密度の標準偏差が一致しているとわかる。条件 ASV と条件 ASVI でも同様に、図-12 と図-13 より手法ごとの密度の期待値がおおよそ一致していると分かる。

b) ボトルネックの交通容量

異質性下では交通容量も確率的に変動する。図-10 から自由流ペースボトルネックにおいて条件 I と条件 ASVI では異質性により交通容量の期待値が低下したとわかる。この容量低下量は、時間によらず一定である。このことは、図-11a において、ボトルネック区間の密度が時間によらずおおよそ一定であるという点からわかる。一方で条件 ASV では交通容量が低下していないとわかる。以上のことから、区間と

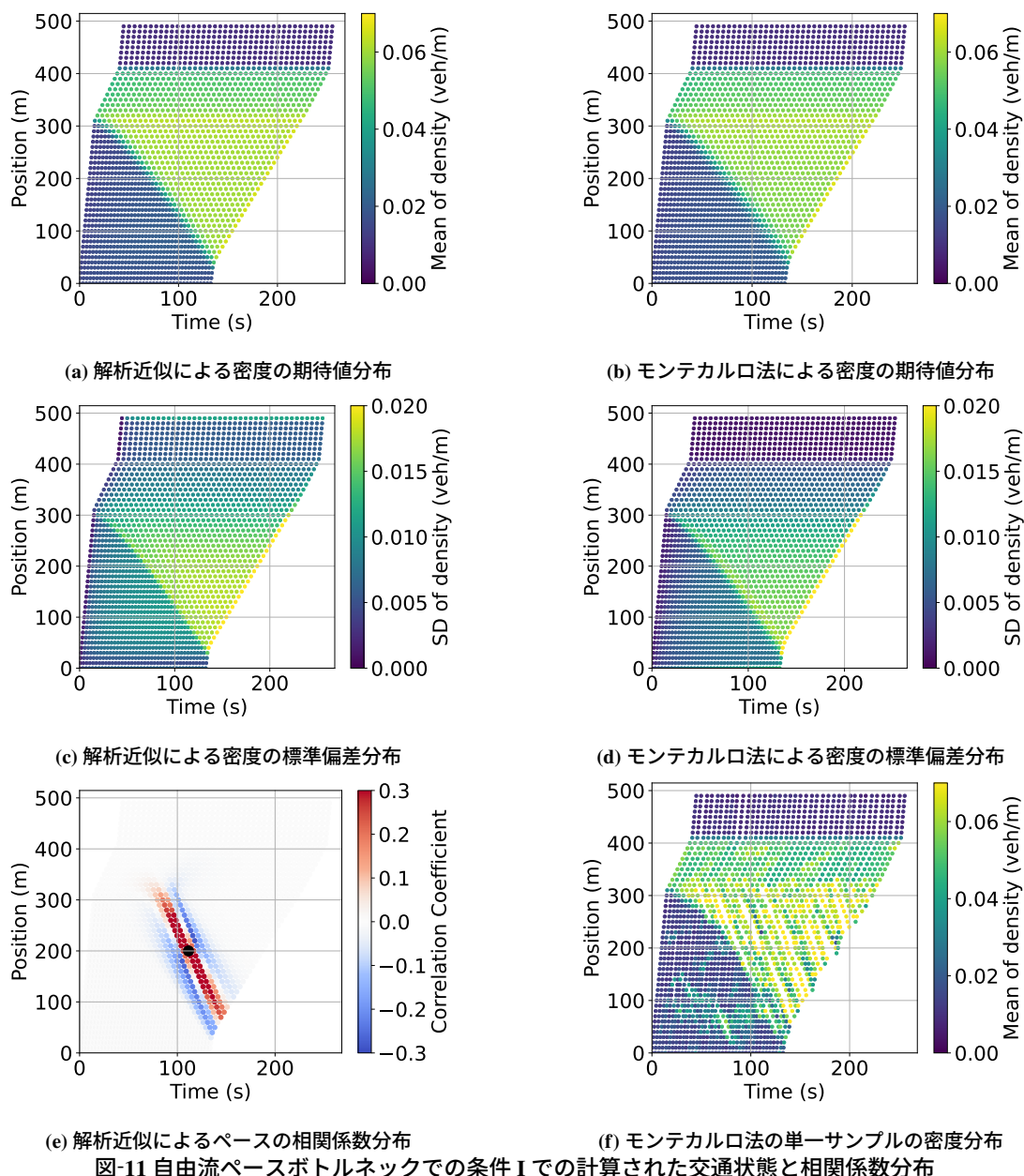
車両ごとの異質性により交通容量が低下するとわかる。また、条件 I に比べ条件 ASV と条件 ASVI は、FD パラメータの不確実性が大きいと交通容量の不確実性が大きい。

c) 不確実性と stop-and-go 波

区間と車両別の不確実性による stop-and-go 波の再現可能性を明らかにする。そのために、モンテカルロ法で得られた単一サンプルでの密度の分布から stop-and-go 波の発生有無を確認する。そして、密度分布の縞模様と、解析近似から得られた相関係数分布の縞模様の関係を考察する。

自由流ペースボトルネックにおいて、条件 I と条件 ASVI では図-11f と図-13f より高密度な領域と低密度な領域が交互に確認できるため、stop-and-go 波が発生しているといえる。一方で条件 ASV では、図-12f より衝撃波方向に高密度な領域と低密度な領域が交互に確認できないため、stop-and-go 波が発生していないといえる。同様にすると、表-3 と表-4 より、ボトルネックの設定方法によらず、区間と車両別の不確実性を含む条件のみ stop-and-go 波が確認できた。これは、stop-and-go 波の再現には区間と車両別の不確実性が必要であるという既往研究^{2),7)}の結果と整合的な結果である。

相関係数分布の縞模様と stop-and-go 波の存在、波長、周期には一定の関係がある。まず、自由流ペースボトルネックのもとでの条件 I と条件 ASVI では図-11e と図-13e において、相関係数の符号の正負による縞模様が確認でき、図-11f と図-13b のそれぞれ比



較すると、波の時間方向や地点方向の幅がおおよそ一致している。そして、自由流ペースボトルネックのもとでの条件 ASV では図-12e において、相関係数の符号の正負による縞模様が確認できなかった。これらの結果は、stop-and-go 波と相関係数分布の仮説と対応する結果である。

自由流ペースボトルネックのもとで第 3.3 節で求めた理論的に予測される周期と波長は、式 (71) と式 (74) より 18 s と 90 m となる。一方、図-16 より、自由流ペースボトルネックのもとで数値実験によって得られた周期と波長は 18 s と 90 m であり、理論的予測と一致した。

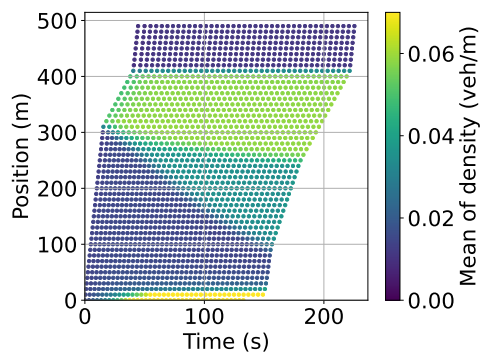
d) ボトルネックの設定方法と相関係数分布

数値実験ではボトルネックの表現として 2 つのパ

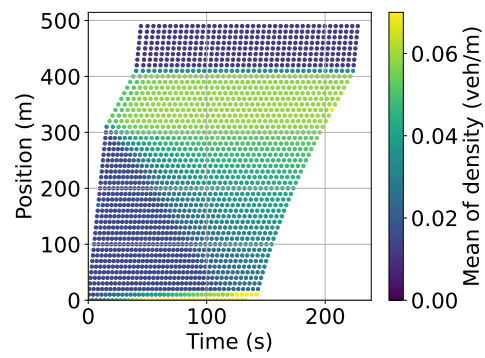
ラメータ設定を行った。そのため、これらの設定方法の違いが相関係数分布にもたらす影響を考察する。

自由流ペースボトルネックと反応時間ボトルネックでは stop-and-go 波の発生と相関係数分布における縞模様の有無の対応において対称的な結果が得られた。図-11 から図-13 より、自由流ペースボトルネックでは、stop-and-go 波の発生と相関係数分布における縞模様の有無の対応が見て取れる。一方で、反応時間ボトルネックでは、条件 I では図-14 のように同様の対応関係が存在するが、条件 ASVI では図-15 のように同様の対応関係がない。

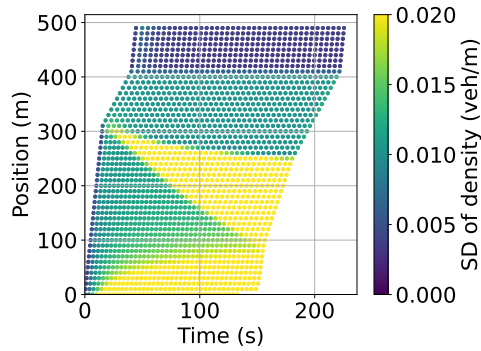
この要因として、解析近似における基準となるペースの扱いが挙げられる。反応時間ボトルネックでは、反応時間の変動がボトルネックにおける交通容量そ



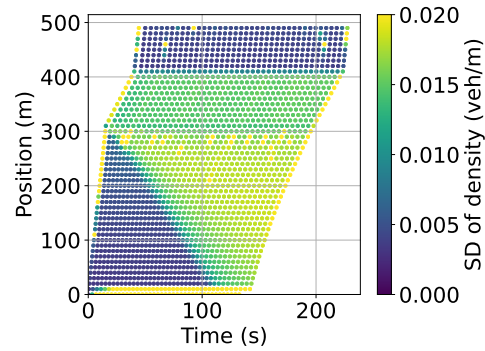
(a) 解析近似による密度の期待値分布



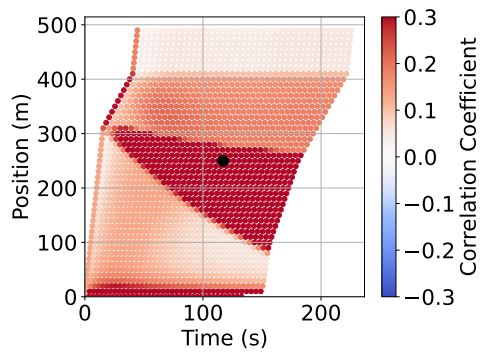
(b) モンテカルロ法による密度の期待値分布



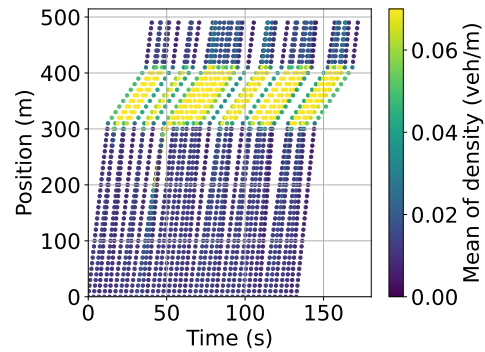
(c) 解析近似による密度の標準偏差分布



(d) モンテカルロ法による密度の標準偏差分布



(e) 解析近似によるベースの相関係数分布



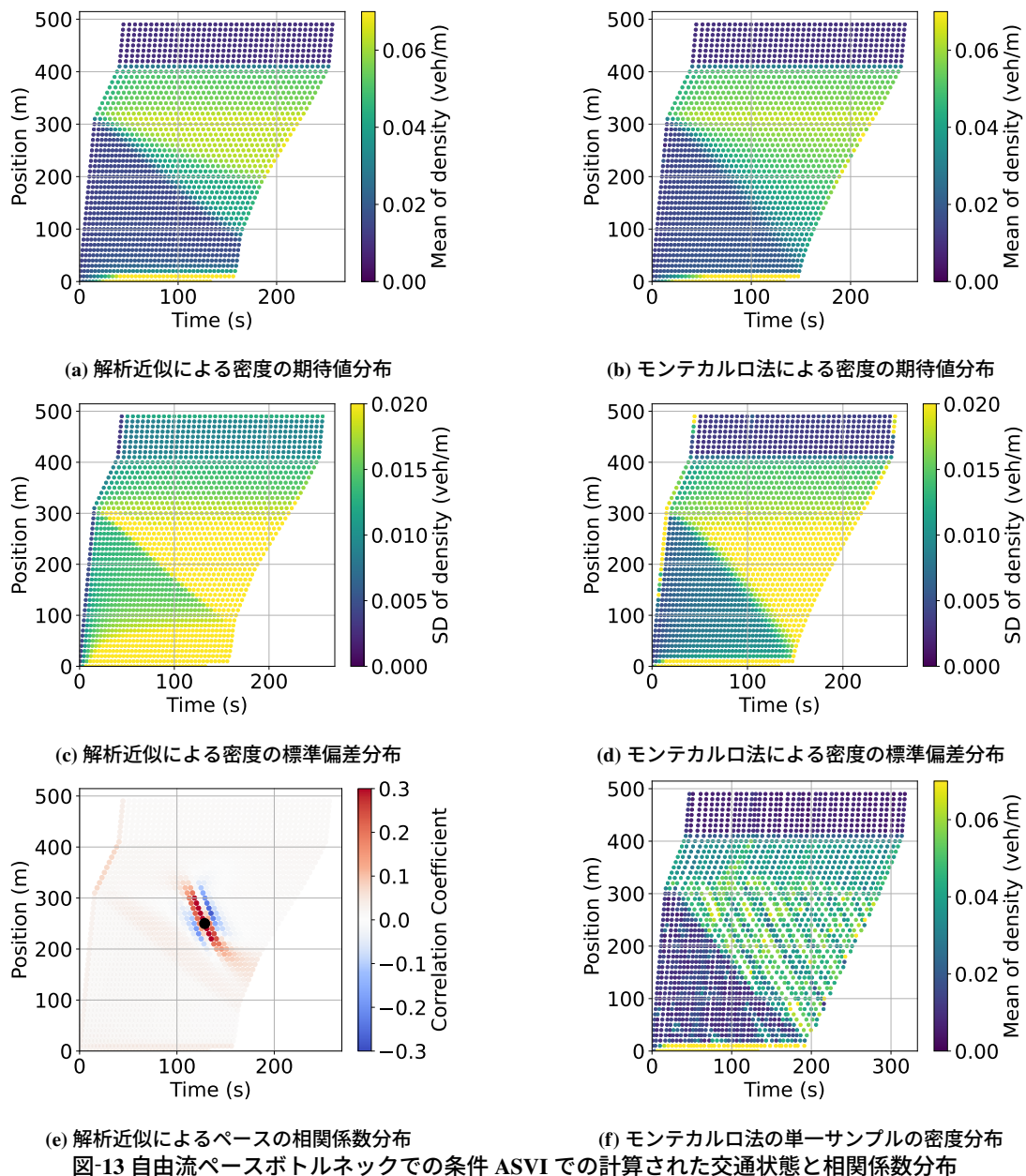
(f) モンテカルロ法の単一サンプルの密度分布

図-12 自由流ベースボトルネックでの条件 ASV での計算された交通状態と相関係数分布

のものを変化させるため、個々のサンプルごとに基準となるペースが異なる。しかし、解析近似では全サンプルを通じた単一の期待値、分散、共分散を扱うため、各サンプル内での偏差を個別に抽出できない。その結果として、図-15eにおいて、ボトルネックの交通容量による大域的な相関係数変化が相関係数分布に現れたと思われる。対して、自由流ベースボトルネックでは、ボトルネック区間における交通容量が反応時間によらず変化しないため、サンプル間で比較的共通の基準値となるペースになる。その結果として偏差が解析近似においても適切に評価されるため、車両内異質性以外の異質性の有無によらず、stop-and-go 波による縞模様が呈したと考えられる。

5. おわりに

本研究の目的は、異質性と不確実性のもとでのマクロ交通流モデルの解析近似手法の開発であった。この目的を達成するため、まず区間および車両の異質性を表現可能なマクロ交通流モデルを構築した。次に、このモデルの交通状態と交通流基本図のパラメータを確率変数として扱い、不確実性を導入した確率的マクロ交通流モデルを定式化した。さらに、この確率的モデルに対する解析近似手法を提案した。提案モデルのもとで、stop-and-go 波の特性を定性的と解析的に分析した。そして、数値実験を行い、提案手法の計算精度を検証した。最後に、異質性と不確実性が交通流に与える影響を分析した。より具体



的な分析内容と得られた知見は以下の通りである。

第一に、stop-and-go 波の特性を解析的に分析した。Stop-and-go 波の波長と周期を、stop-and-go 波と関連がある相関係数の符号パターンから導出した。その結果、stop-and-go 波の波長と周期と、FD のパラメータおよび定常状態の交通状態の関係を理論的に示した。

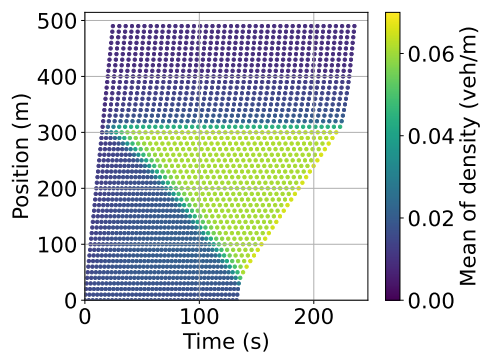
第二に、提案手法の近似精度を検証した。モンテカルロ法との比較を行った結果、両者の差異は小さいと確認できた。

第三に、FD のパラメータの不確実性が stop-and-go 波に与える影響を分析した。数値実験の結果、車両異質性や区間異質性の相互作用による不確実性のもとで stop-and-go 波の発生を確認した。これは既往

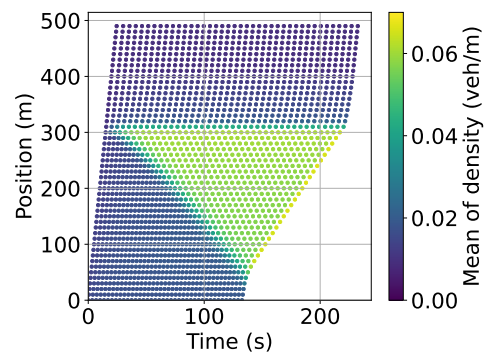
研究^{2),7)}で示された、車両内異質性が stop-and-go 波の発生に寄与するという知見の通りである。また、stop-and-go 波と相関係数分布の縞模様に関連があるとわかった。

今後の課題としては、反応時間によってボトルネックを表すと、相関係数分布を用いて stop-and-go 波が捉えられない点がある。これは、解析近似手法では各サンプルごとに基準点と参照点の差を捉えられないためである。

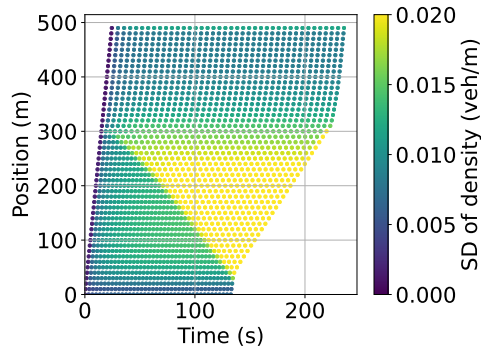
今後の展望としては、ネットワークへの拡張がある。提案モデルは単一の道路リンクを対象とする。しかし、実際の交通は複雑なネットワーク上で発生する。そのため、交通ネットワークへの拡張は、より現実的な状況の分析を可能にする。ネットワークへ



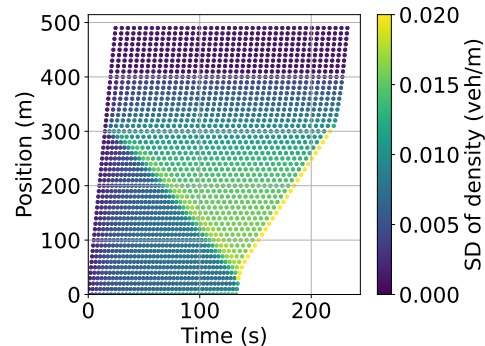
(a) 解析近似による密度の期待値分布



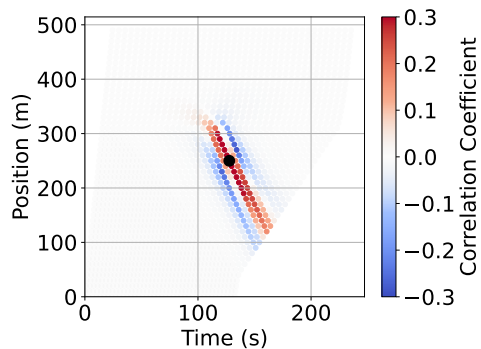
(b) モンテカルロ法による密度の期待値分布



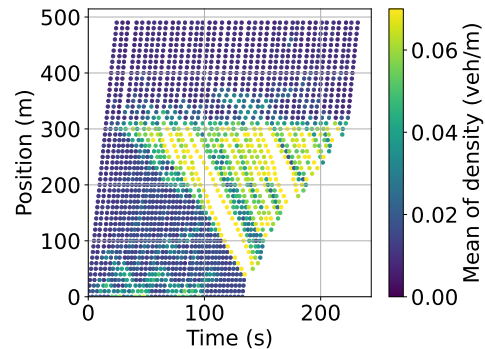
(c) 解析近似による密度の標準偏差分布



(d) モンテカルロ法による密度の標準偏差分布



(e) 解析近似によるベースの相関係数分布



(f) モンテカルロ法の単一サンプルの密度分布

図-14 反応時間ボトルネックでの条件 I での計算された交通状態と相関係数分布

の拡張における主な課題は、合流部や分岐部といったノードの取り扱いである。

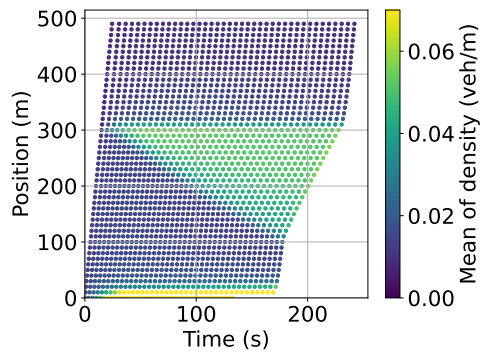
謝辞：本研究の遂行にあたっては、第二著者と和田健太郎博士と日下部貴彦博士との議論が出発点となった。ここに謝意を表する。

REFERENCES

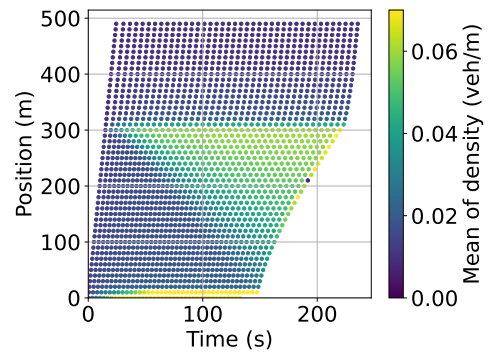
- 1) 瀬尾亨: マクロ交通流シミュレーション: 数学的基礎理論と Python による実装, コロナ社, pp. 224, 2023.
- 2) Zheng, S.-T., Jiang, R., Tian, J., Li, X., Treiber, M., Li, Z.-H., Gao, L.-D., and Jia, B.: Empirical and experimental study on the growth pattern of traffic oscillations upstream of fixed bottleneck and model test, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 140, p. 103729, 2022.
- 3) 中西航: 全車両軌跡データとスパースモデリングによる区間別 Fundamental Diagram の推定, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 78, No. 1, pp. 24–33, 2022.
- 4) 大口敬: 高速道路サグにおける渋滞の発生と道路線

形との関係, 土木学会論文集, Vol. 1995, No. 524, pp. 69–78, 1995.

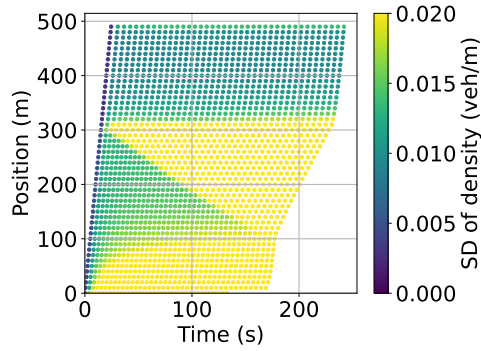
- 5) 吉田光太郎, 中西航, 朝倉康夫: Newell 型モデルのパラメータ推定による時間帯別の車両追従挙動分析, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 76, No. 5, pp. I 1253–I 1261, 2021.
- 6) Taylor, J., Zhou, X., Rouphail, N. M., and Porter, R. J.: Method for investigating intradriver heterogeneity using vehicle trajectory data: A Dynamic Time Warping approach, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 73, pp. 59–80, 2015.
- 7) Laval, J. A. and Leclercq, L.: A mechanism to describe the formation and propagation of stop-and-go waves in congested freeway traffic, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 368, No. 1928, pp. 4519–4541, 2010.
- 8) Wong, G. and Wong, S.: A multi-class traffic flow model - an extension of lwr model with heterogeneous drivers, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 36, No. 9, pp. 827–841, 2002.
- 9) Tang, T., Huang, H., Zhao, S., and Shang, H.: A new dy-



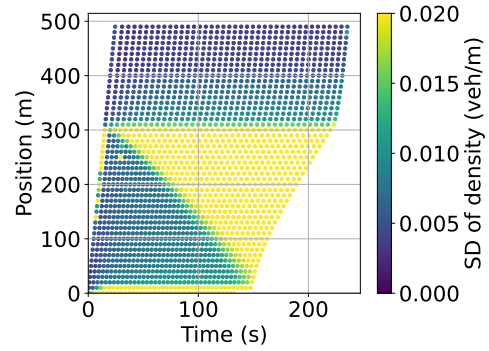
(a) 解析近似による密度の期待値分布



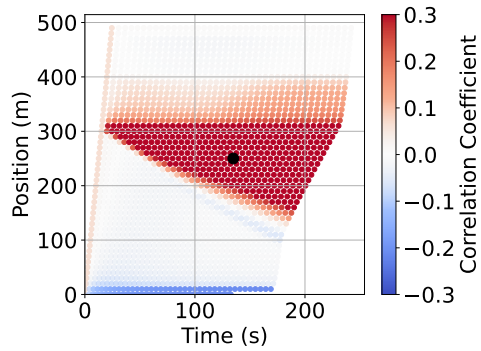
(b) モンテカルロ法による密度の期待値分布



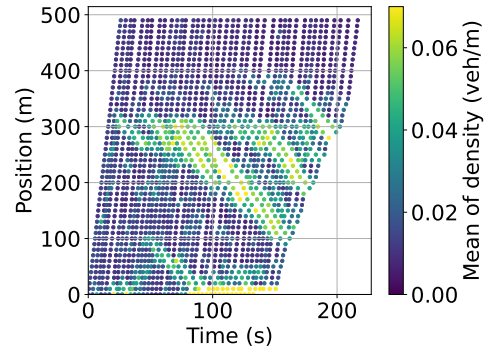
(c) 解析近似による密度の標準偏差分布



(d) モンテカルロ法による密度の標準偏差分布

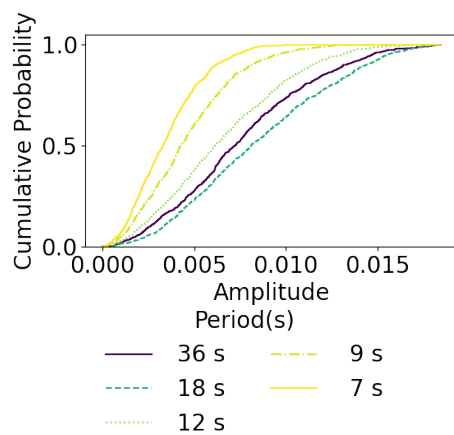


(e) 解析近似によるペースの相関係数分布

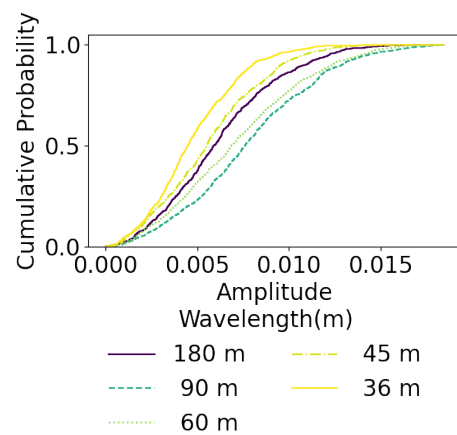


(f) モンテカルロ法の単一サンプルの密度分布

図-15 反応時間ボトルネックでの条件 ASVI での計算された交通状態と相関係数分布



(a) 周期の累積確率分布



(b) 波長の累積確率分布

図-16 自由流ペースボトルネックでの条件 I での Stop-and-go 波の周期と波長

表-3 自由流ペースボトルネックでの実験結果

条件名	Stop-and-go 波の発生	密度の期待値の RMSE (veh/m)	密度の標準偏差の RMSE (veh/m)
D	なし	0.000	0.000
A	なし	0.035	0.027
S	なし	0.034	0.027
V	なし	0.029	0.009
AS	なし	0.038	0.027
AV	なし	0.037	0.032
SV	なし	0.027	0.017
ASV	なし	0.030	0.033
I	あり	0.002	0.003
AI	あり	0.043	0.038
SI	あり	0.050	0.039
VI	あり	0.028	0.017
ASI	あり	0.055	0.039
AVI	あり	0.055	0.039
SVI	あり	0.025	0.014
ASVI	あり	0.050	0.042

表-4 反応時間ボトルネックでの実験結果

条件名	Stop-and-go 波の発生	密度の期待値の RMSE (veh/m)	密度の標準偏差の RMSE (veh/m)
D	なし	0.000	0.000
A	なし	0.021	0.011
S	なし	0.023	0.013
V	なし	0.000	0.004
AS	なし	0.055	0.021
AV	なし	0.030	0.014
SV	なし	0.031	0.017
ASV	なし	0.057	0.026
I	あり	0.002	0.006
AI	あり	0.029	0.011
SI	あり	0.029	0.012
VI	あり	0.003	0.019
ASI	あり	0.052	0.037
AVI	あり	0.033	0.033
SVI	あり	0.032	0.054
ASVI	あり	0.054	0.114

dynamic model for heterogeneous traffic flow, *Physics Letters A*, Vol. 373, No. 29, pp. 2461–2466, 2009.

- 10) Wada, K., Usui, K., Takigawa, T., and Kuwahara, M.: An optimization modeling of coordinated traffic signal control based on the variational theory and its stochastic extension, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 117, pp. 907–925, 2018. TRB:ISTTT-22.
- 11) 高安杏奈, 原祐輔, 和田健太郎, 桑原雅夫: 入力データの確率変動を考慮した交通状態推定—Variational Theory に基づいた解析と検証—, 土木計画学研究・講演集, Vol. 53, No. 48-06, 2016.
- 12) Sumalee, A., Zhong, R., Pan, T., and Szeto, W.: Stochastic

cell transmission model (sctm): A stochastic dynamic traffic model for traffic state surveillance and assignment, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 3, pp. 507–533, 2011.

- 13) Zheng, F., Jabari, S. E., Liu, H. X., and Lin, D.: Traffic state estimation using stochastic lagrangian dynamics, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 115, pp. 143–165, 2018.
- 14) Laval, J. A. and Leclercq, L.: The hamilton–jacobi partial differential equation and the three representations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 52, pp. 17–30, 2013.

- 15) Newell, G.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 36, No. 3, pp. 195–205, 2002.
- 16) Khan, M.: Longest path in a directed acyclic graph (dag), *CSE Algorithms, Brac Univ., Dhaka, Bangladesh*, 2011.
- 17) Clark, C. E.: The greatest of a finite set of random variables, *Operations Research*, Vol. 9, No. 2, pp. 145–162, 1961.
- 18) 中村剛: 正規変量の逆数のモーメントとその特性について, *応用統計学*, Vol. 9, No. 2, pp. 67–72, 1980.
- 19) Treiber, M. and Kesting, A.: *Traffic Flow dynamics: Data, Models and Simulation*, Springer Berlin, Heidelberg, pp. 506, 2012.

(Received ??? ?? 202?)
(Accepted ??? ?? 202?)

ANALYTICAL APPROXIMATION OF STOCHASTIC TRAFFIC FLOW MODELS UNDER HETEROGENEITY AND UNCERTAINTY

Kazuma HAYASHI and Toru SEO

Traffic flows are subject to uncertainty and various heterogeneities. These include section heterogeneity (e.g., curves, gradients, speed limits, and lane configurations) and vehicle heterogeneity (e.g., reaction times, maximum speeds, and acceleration characteristics). This study incorporates these elements into a stochastic extension of a macroscopic traffic flow model and proposes a solution method using an analytical approximation. The properties of the proposed model and the numerical method are verified. Furthermore, the model is demonstrated to capture and analyze complex phenomena.